

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN

12

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây.

Hình thành kiến thức: Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HO**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HO** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới **khung kiến thức** một cách tự nhiên.

Ví dụ: Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.

Luyện tập: Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.

Vận dụng: Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

Em có thể bắt gặp một **khung chữ** nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào **Khám phá**, **Trải nghiệm**, **Thảo luận**, trả lời , mở rộng hiểu biết cùng **Em có biết?**,...

Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

*Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!*

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Trên tay các em là cuốn *TOÁN 12* của bộ sách “Kết nối tri thức với cuộc sống”. Đúng như tên gọi của bộ sách, các kiến thức trình bày ở đây chủ yếu xuất phát từ những tình huống của cuộc sống quanh ta và trở lại giúp ta giải quyết những vấn đề của cuộc sống. Vì thế, khi học Toán theo cuốn sách này, các em sẽ cảm nhận được rằng, Toán học thật là gần gũi.

Đoạn mở đầu của các chương, các bài học thường đưa ra những tình huống, những ví dụ thực tế cho thấy sự cần thiết phải đưa đến những khái niệm toán học mới. Qua đó, các em sẽ được trau dồi những kĩ năng cần thiết cho một công dân trong thời hiện đại, đó là khả năng “mô hình hoá”. Khi đã đưa vấn đề thực tiễn về bài toán (mô hình toán học), chúng ta sẽ phát hiện thêm những kiến thức toán học mới, để cùng với những kiến thức đã biết giải quyết bài toán thực tiễn đặt ra.

Hi vọng rằng, qua mỗi bài học, mỗi chương sách, qua mỗi vòng lặp từ thực tiễn đến tri thức toán học, rồi từ tri thức toán học quay về thực tiễn, *TOÁN 12* sẽ giúp các em trưởng thành nhanh chóng và trở thành người bạn thân thiết của các em.

Chúc các em thành công cùng *TOÁN 12*!

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số 5

Bài 2. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số 15

Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số 20

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số 26

Bài 5. Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn 33

Bài tập cuối chương I 42

CHƯƠNG II. VECTO VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 6. Vector trong không gian 45

Bài 7. Hệ trục toạ độ trong không gian 60

Bài 8. Biểu thức toạ độ của các phép toán vector 67

Bài tập cuối chương II 73

CHƯƠNG III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 9. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị 75

Bài 10. Phương sai và độ lệch chuẩn 80

Bài tập cuối chương III 85

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với phần mềm GeoGebra 87

Vẽ vector tổng của ba vector trong không gian bằng phần mềm GeoGebra 92

Độ dài gang tay (gang tay của bạn dài bao nhiêu?) 94

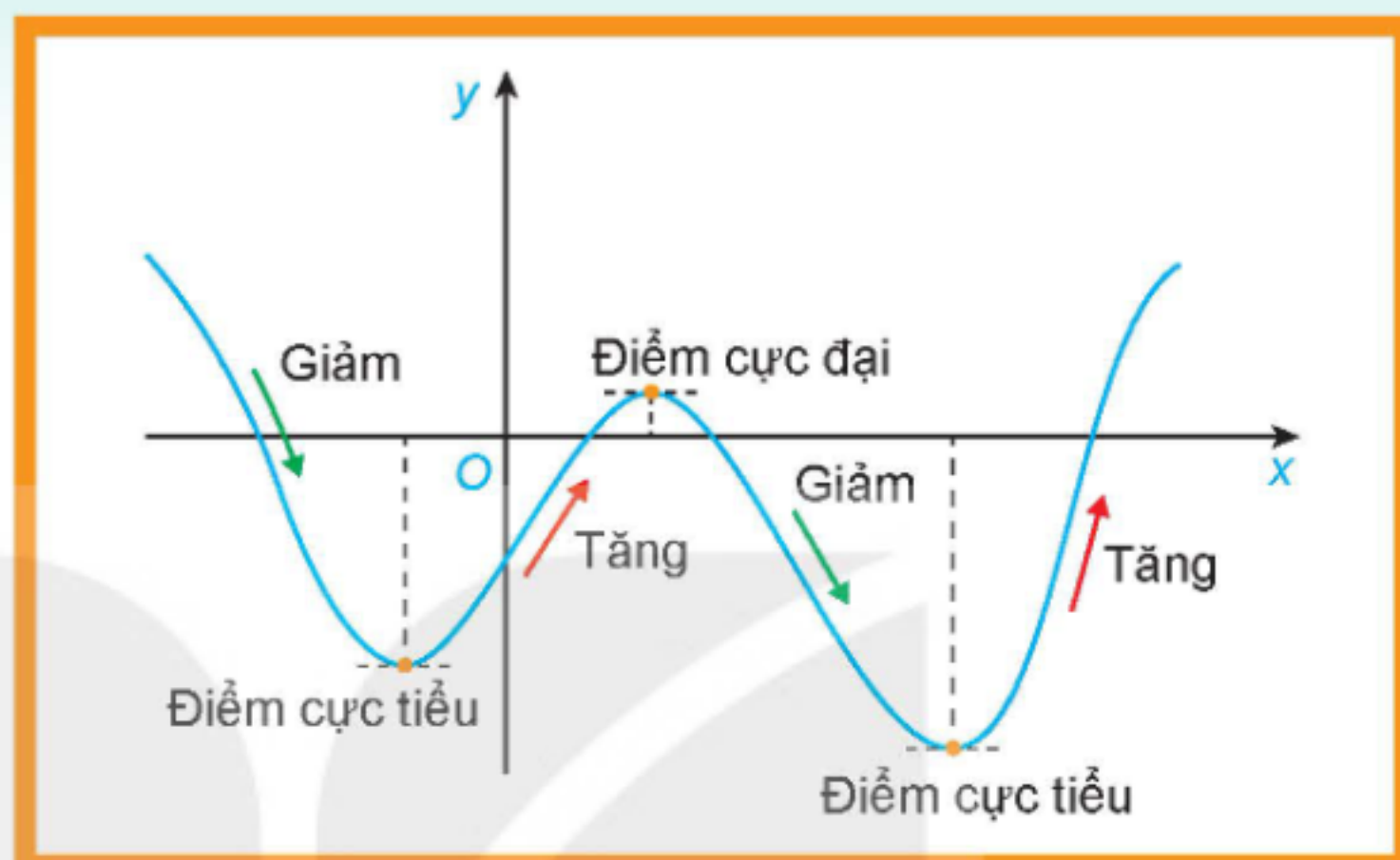
Bảng tra cứu từ ngữ 99

Bảng giải thích thuật ngữ 100

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Trong chương này chúng ta ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên, vẽ đồ thị của hàm số và giải quyết những vấn đề thực tiễn liên quan.



Bài 1

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

THUẬT NGỮ

- Bảng biến thiên
- Đồng biến
- Nghịch biến
- Cực đại
- Cực tiểu
- Cực trị

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó.
- Thể hiện tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong bảng biến thiên.
- Nhận biết tính đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.
- Nhận biết điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.

Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (H.1.1). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0.$$

Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1.1

1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

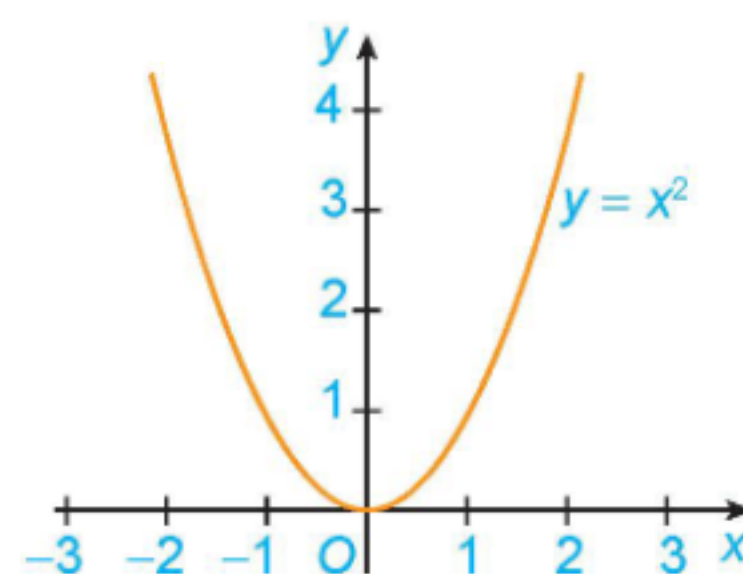
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

» **HĐ1.** Nhận biết tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^2$ (H.1.2).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?



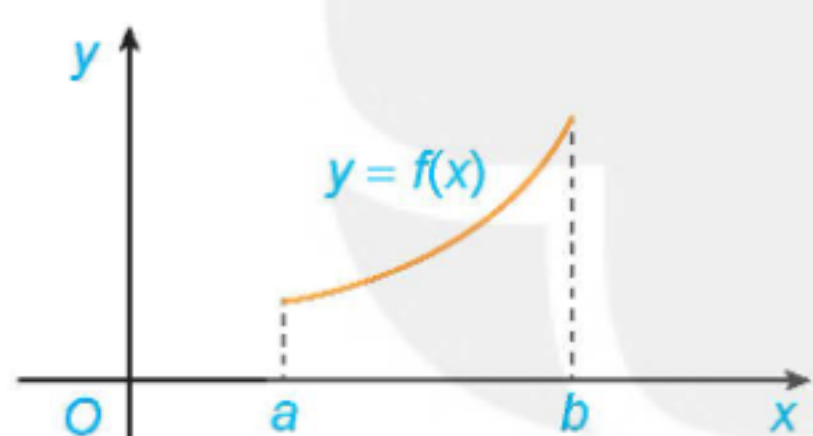
Hình 1.2

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

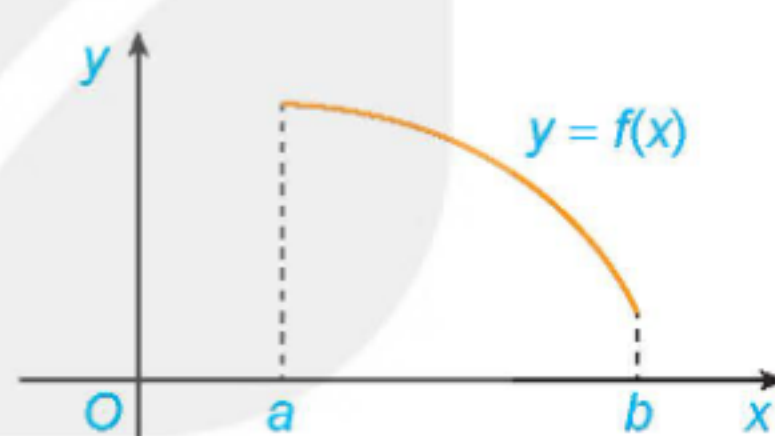
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Chú ý

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số **đi lên** từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số **đi xuống** từ trái sang phải (H.1.3b).



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$.



b) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$.

Hình 1.3

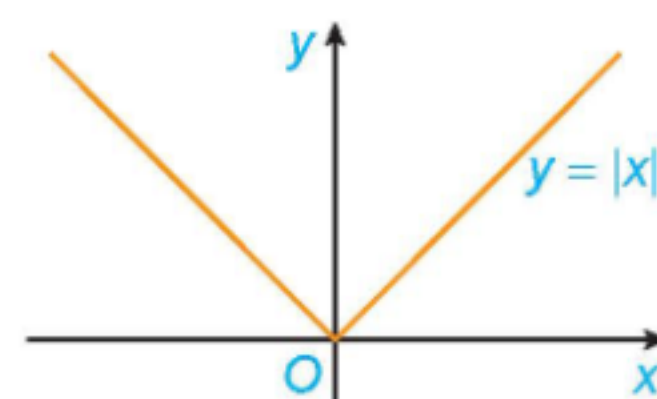
- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là **đơn điệu** trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

» **Ví dụ 1.** Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

Giải

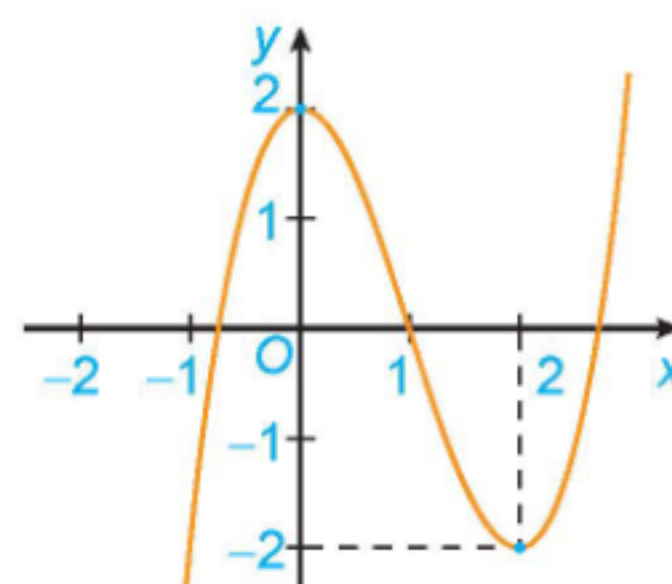
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.



Hình 1.4

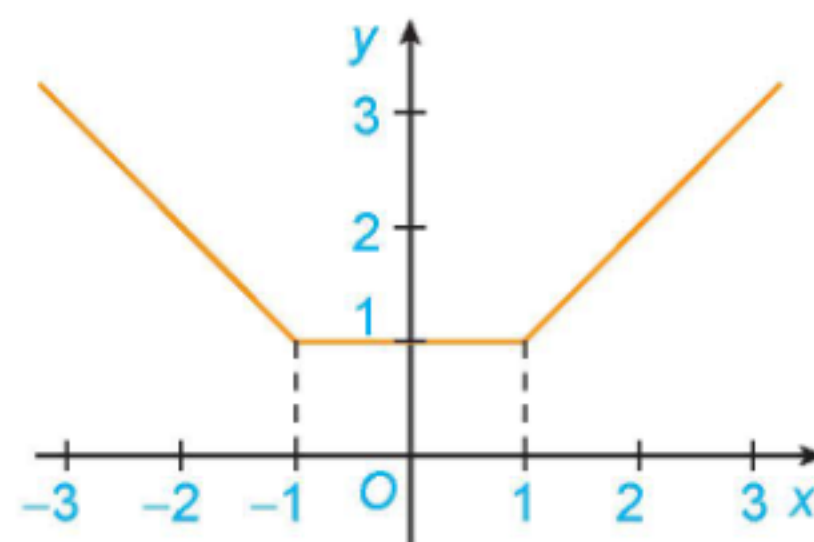
» **Luyện tập 1.** Hình 1.5 là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.5

» **H02.** Nhận biết mối quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Xét hàm số $y = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < -1 \\ 1 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ có đồ thị như Hình 1.6.



Hình 1.6

- Xét dấu đạo hàm của hàm số trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$. Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến và dấu đạo hàm của hàm số trên mỗi khoảng này.
- Có nhận xét gì về đạo hàm y' và hàm số y trên khoảng $(-1; 1)$?

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

Chú ý

Người ta chứng minh được rằng:

- Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K .

» **Ví dụ 2.** Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x - 4$; $y' > 0$ với $x \in (2; +\infty)$; $y' < 0$ với $x \in (-\infty; 2)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

» **Luyện tập 2.** Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

» **H03.** Xét tính đơn điệu của hàm số bằng bảng biến thiên

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

- Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x mà $f'(x) = 0$.
- Lập *bảng biến thiên* của hàm số, tức là lập bảng thể hiện dấu của đạo hàm và sự đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng tương ứng.
- Nêu kết luận về khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

Chú ý. Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

» **Ví dụ 3.** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$.

» **Ví dụ 4.** Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{x - 2}{x + 1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

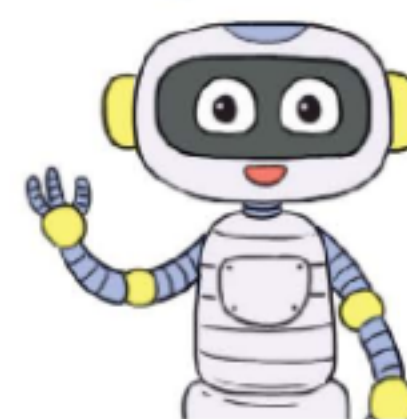
Ta có: $y' = \frac{(x + 1) - (x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{3}{(x + 1)^2} > 0$, với mọi $x \neq -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được nói gọn là *xét chiều biến thiên* của hàm số.



» **Luyện tập 3.** Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2;$

b) $y = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 2}.$

» **Vận dụng 1.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu bằng cách thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

- Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc $v(t)$ là đạo hàm của $s(t)$. Hãy tìm vận tốc $v(t)$.
- Xét dấu của hàm $v(t)$, từ đó suy ra câu trả lời.

Chất điểm chuyển động theo chiều dương khi vận tốc $v(t) > 0$.



2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

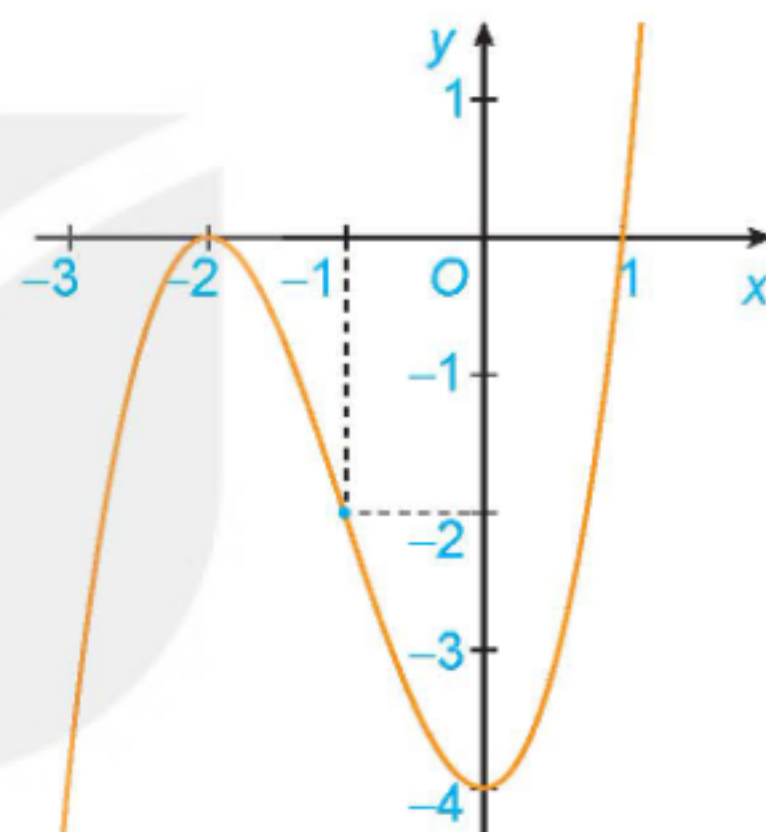
a) Khái niệm cực trị của hàm số

» **HĐ4.** Nhận biết khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (H.1.7). Xét dấu đạo hàm của hàm số đã cho và hoàn thành các bảng sau vào vở:

x	-3	-2	-1
y'	?	0	?
y	-4	?	-2

x	-1	0	1
y'	?	0	?
y	-2	?	0



Hình 1.7

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

Chú ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.

» **Ví dụ 5.** Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.

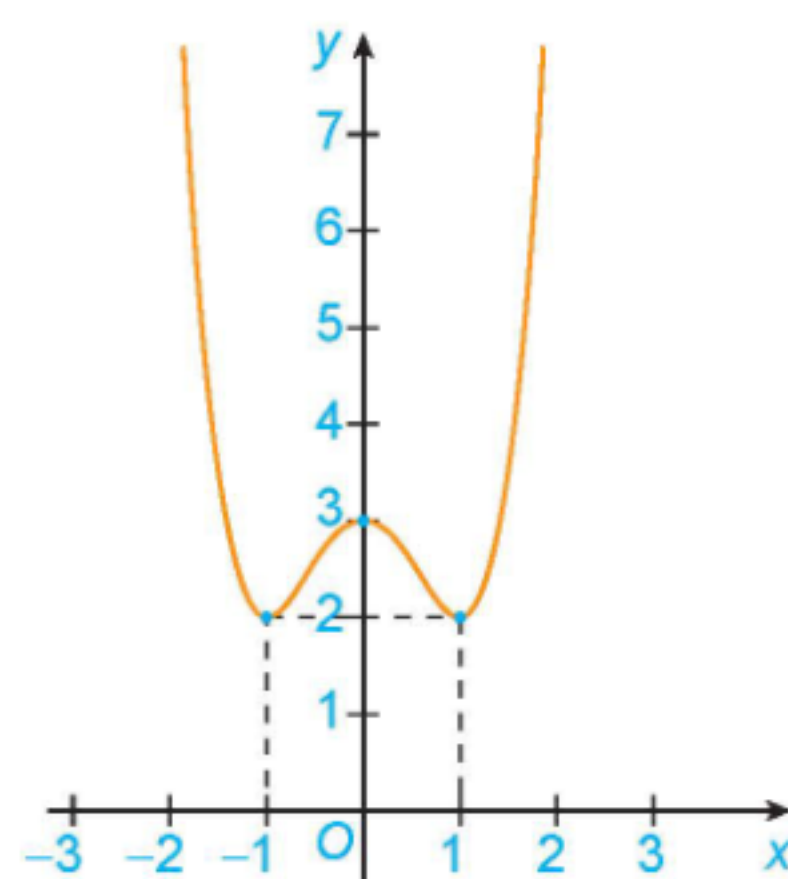
Giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.

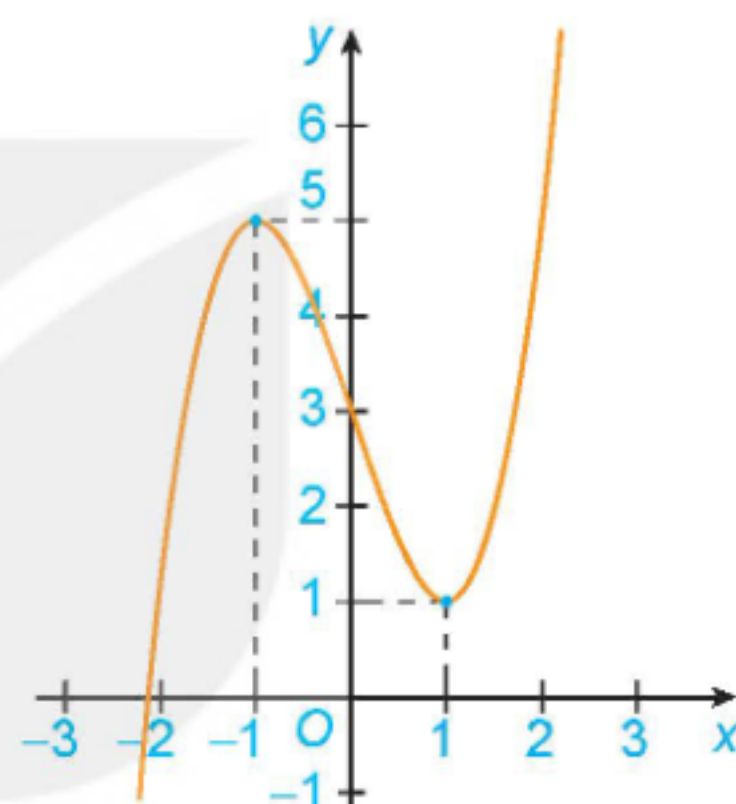
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = y(0) = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.



Hình 1.8

» **Luyện tập 4.** Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

b) Cách tìm cực trị của hàm số

» **H05.** Nhận biết cách tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$.

- Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.



Giải thích vì sao nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Khung kiến thức trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Chú ý. Các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» **Ví dụ 6.** Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

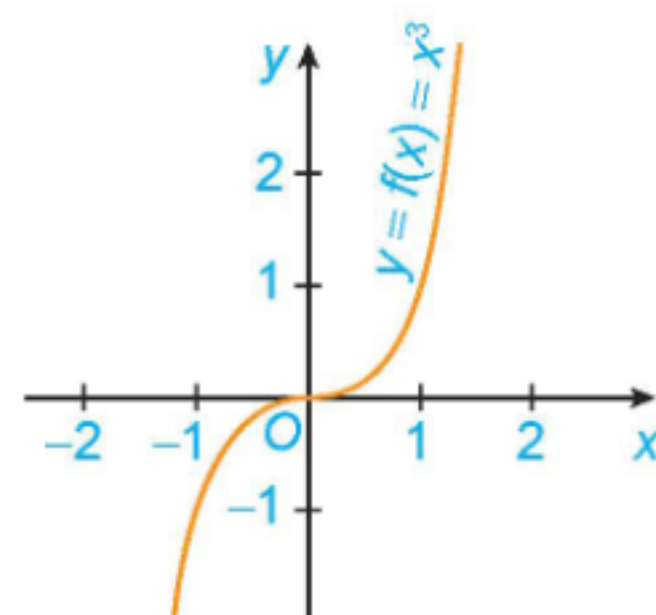
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	34	30	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 30$.

Chú ý. Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $y = f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số (H.1.10).



Hình 1.10

» **Ví dụ 7.** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x - 2)(x - 2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	8	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

» **Ví dụ 8.** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$
y	1	$+\infty$	1

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

» **Luyện tập 5.** Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

» **Vận dụng 2.** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức

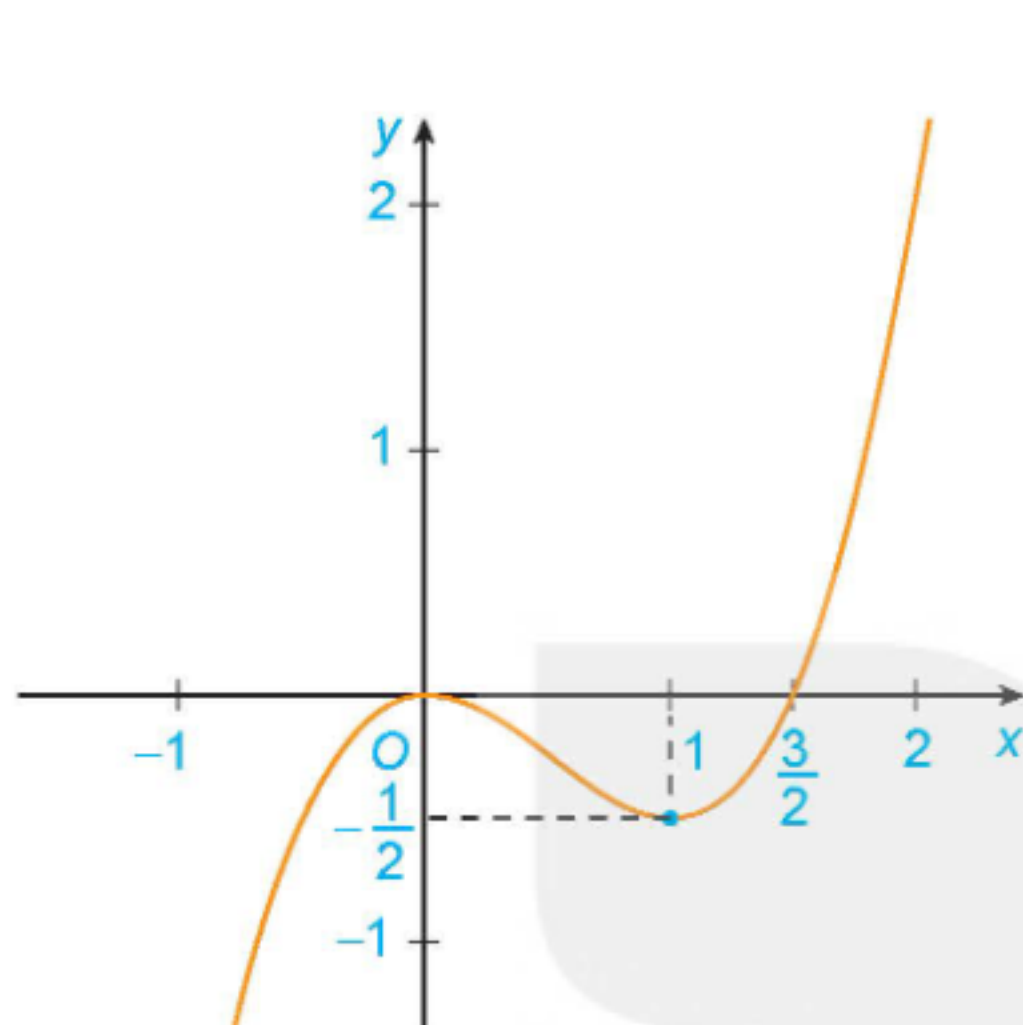
$$h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2.$$

Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

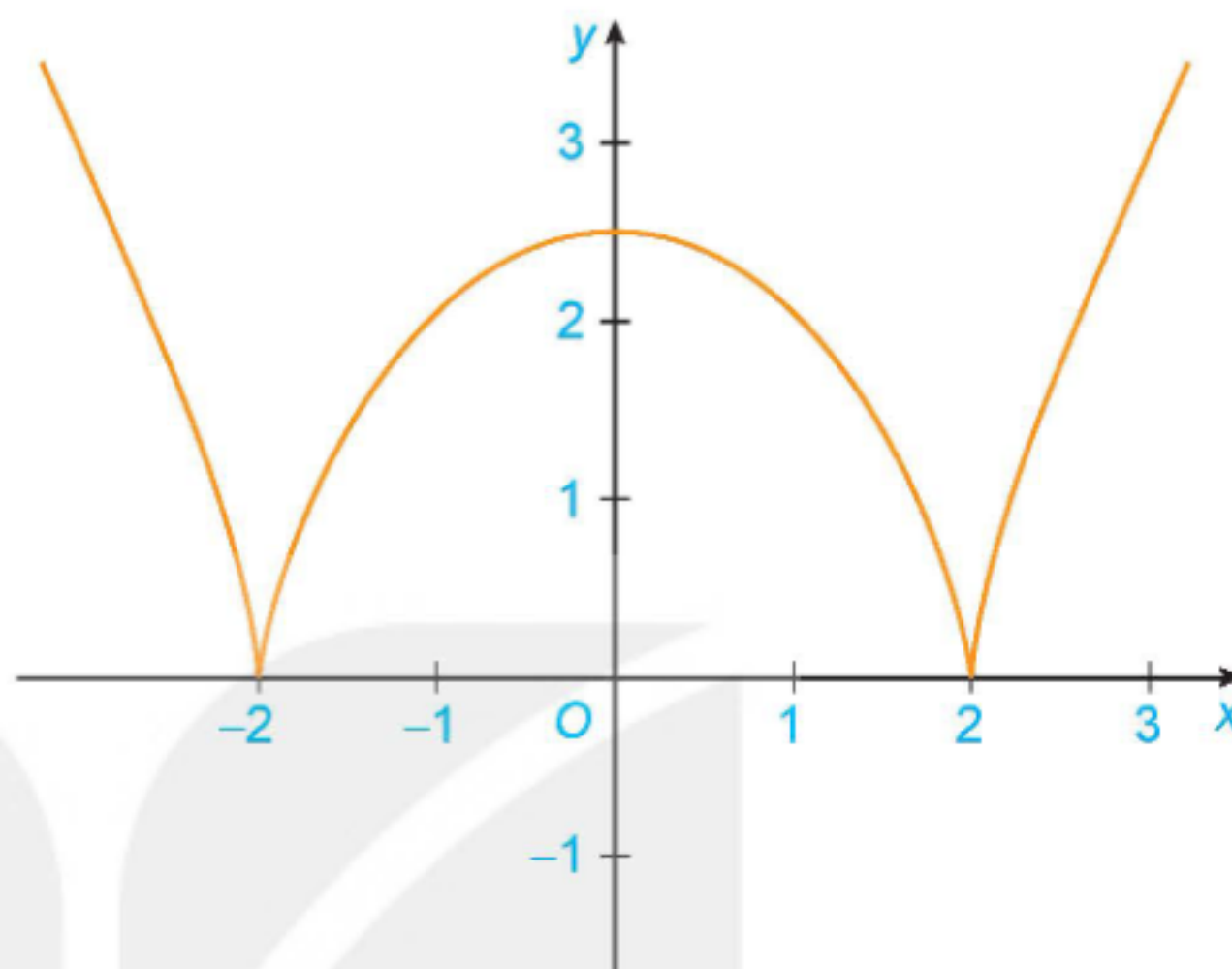
BÀI TẬP

1.1. Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:

- a) Đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ (H.1.11); b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$ (H.1.12).



Hình 1.11



Hình 1.12

1.2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; b) $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3$.

1.3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{2x-1}{x+2}$; b) $y = \frac{x^2+x+4}{x-3}$.

1.4. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

- a) $y = \sqrt{4-x^2}$; b) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

1.5. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, \quad t \geq 0,$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

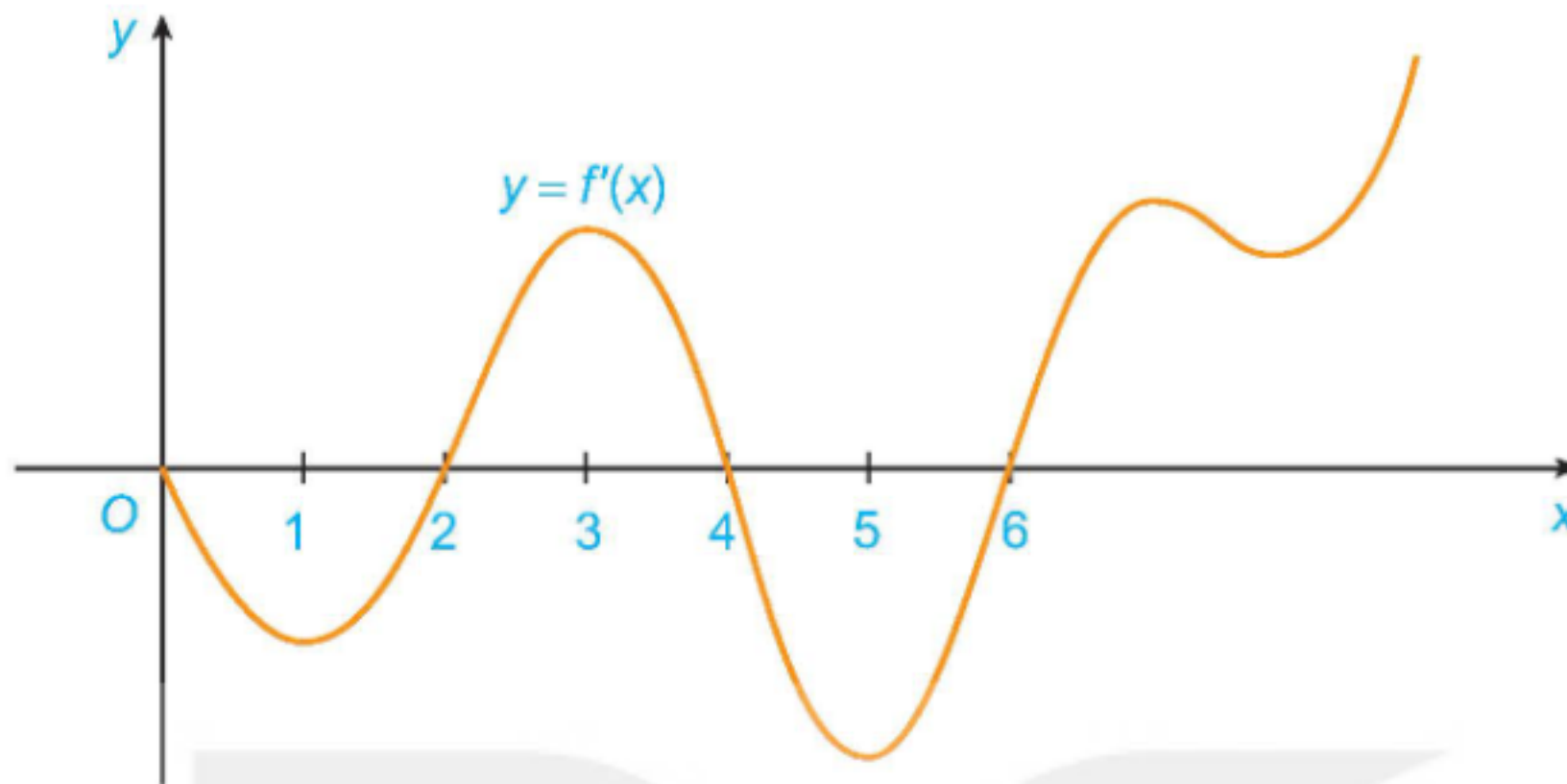
a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

1.6. Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong Hình 1.13.

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên những khoảng nào? Giải thích.

b) Tại giá trị nào của x thì $f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu? Giải thích.



Hình 1.13

1.7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

1.8. Cho hàm số $y = f(x) = |x|$.

a) Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x = 0$ (xem Hình 1.4).

1.9. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5\,000}{1 + 5e^{-t}}, \quad t \geq 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

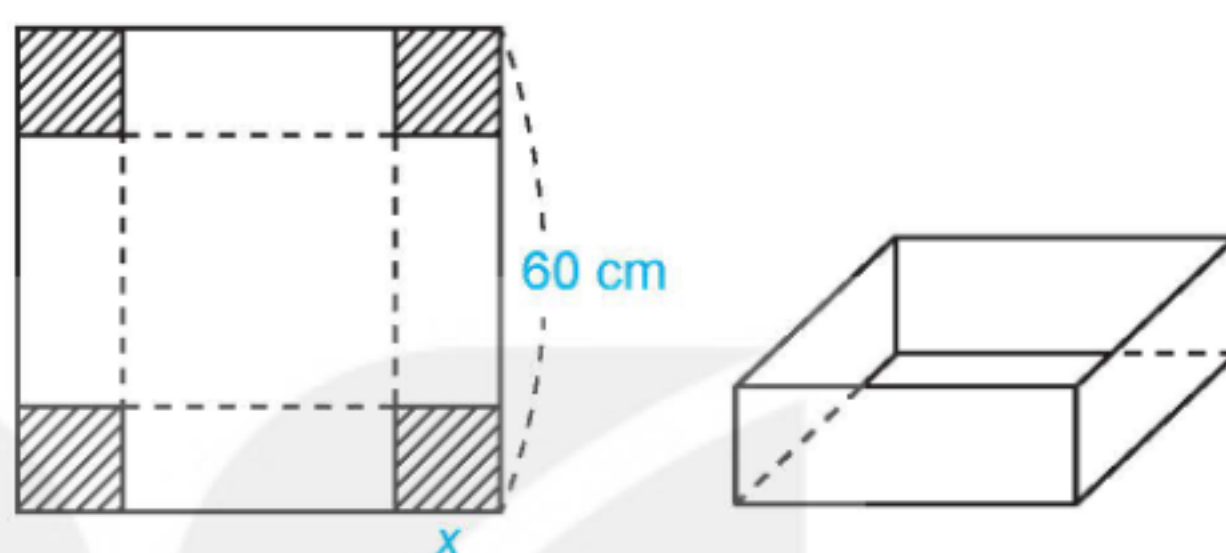
THUẬT NGỮ

- Giá trị lớn nhất
- Giá trị nhỏ nhất

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập xác định cho trước.
- Xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm trong những trường hợp đơn giản.

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (H.1.14). Tính độ dài cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



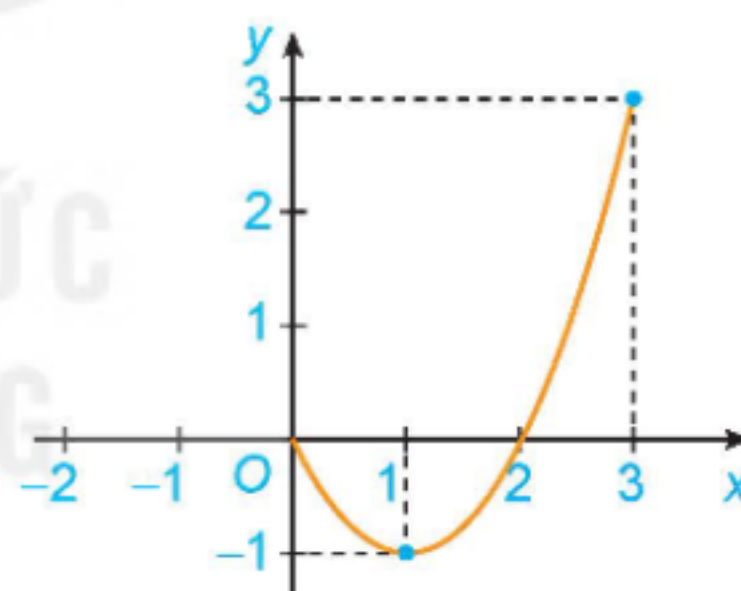
Hình 1.14

1. ĐỊNH NGHĨA

» **H01.** Nhận biết khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$ với $x \in [0; 3]$, có đồ thị như Hình 1.15.

- Giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = M$.
- Giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = m$.



Hình 1.15

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói “trên tập D ”) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

» **Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-1; 1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.
Do đó $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.
- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$. Do đó $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = 1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x \in (-1; 1)$, ta có: $y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$:

x	-1		0		1
y'		+	0	-	
y			1		
	0				0

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$; $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = 1$.

Chú ý. Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu $\min_D y$, $\max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D . Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết:

$$\min_{[-1; 1]} y = y(-1) = y(1) = 0; \max_{[-1; 1]} y = y(0) = 1.$$

» **Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

» **Ví dụ 3.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Giải

Gọi x (cm) là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện: $0 < x < 30$. Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh x (cm) ở bốn góc và gập lên thì ta được một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)$ (cm) và chiều cao bằng x (cm). Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = 30$ (loại).

Lập bảng biến thiên:

x	0	10	30
$V'(x)$		+	0
$V(x)$	0	16 000	0

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là 10 cm.

» **Luyện tập 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

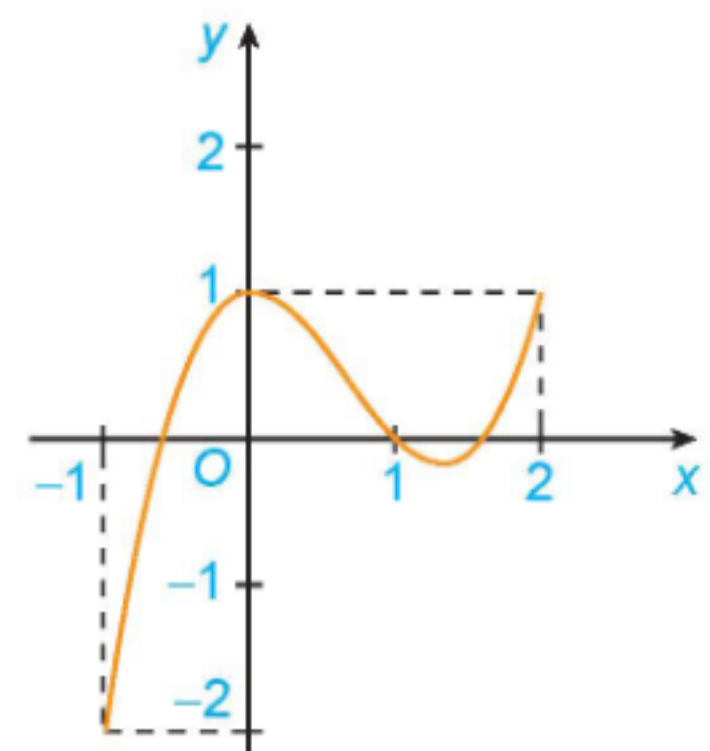
b) $y = -x + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

» **HĐ2.** Hình thành các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$, với đồ thị như Hình 1.16.

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$.



Hình 1.16

- b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm $x \in (-1; 2)$ mà $f'(x) = 0$.
- c) Tính giá trị của hàm số tại hai đầu mút của đoạn $[-1; 2]$ và tại các điểm x đã tìm ở câu b. So sánh số nhỏ nhất trong các giá trị này với $\min_{[-1; 2]} f(x)$, số lớn nhất trong các giá trị này với $\max_{[-1; 2]} f(x)$.

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x).$$

» **Ví dụ 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (vì chỉ tìm $x \in (0; 4)$);

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

Do đó: $\max_{[0; 4]} y = y(4) = 195$; $\min_{[0; 4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

» **Ví dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ (vì chỉ tìm $x \in (0; 2\pi)$);

$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max_{[0; 2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $\min_{[0; 2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

» **Luyện tập 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ trên đoạn $[0; 2]$; b) $y = (x + 1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

» **Vận dụng.** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

- a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
- b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

BÀI TẬP

1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0; +\infty)$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên $(1; +\infty)$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

1.11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

b) $y = xe^{-x}$;

c) $y = x \ln x$;

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

1.12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x + 3$ trên đoạn $[-1; 2]$;

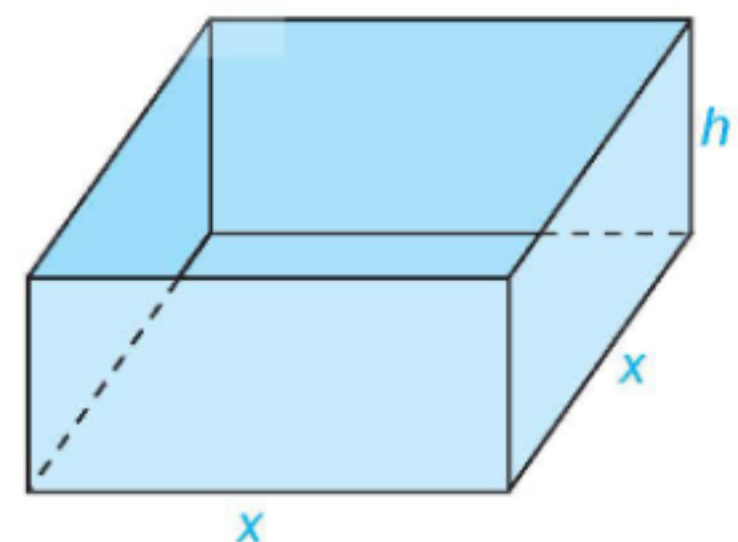
b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$;

c) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$;

d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0; 1]$.

1.13. Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

1.14. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

1.15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình (bán kính đáy và chiều cao của bình) để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

THUẬT NGỮ

- Tiệm cận ngang
- Tiệm cận đứng
- Tiệm cận xiên

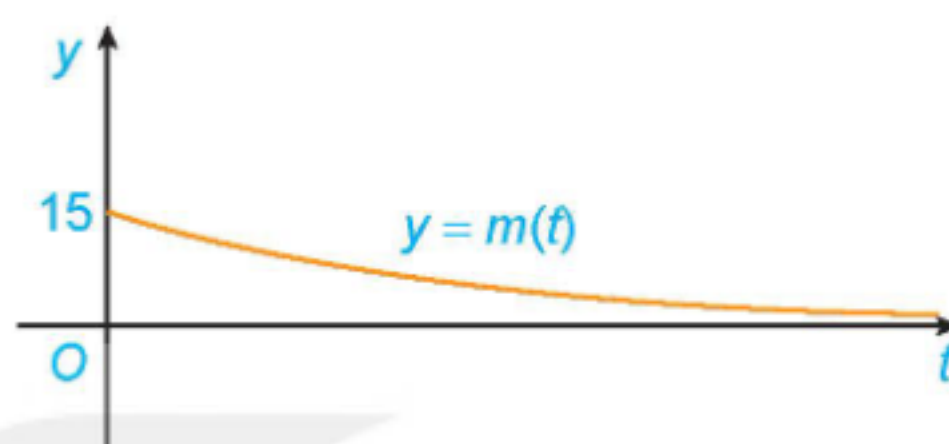
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết hình ảnh hình học của đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số

$$y = m(t) = 15e^{-0,012t}.$$

Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$? Điều này thể hiện trên Hình 1.18 như thế nào?

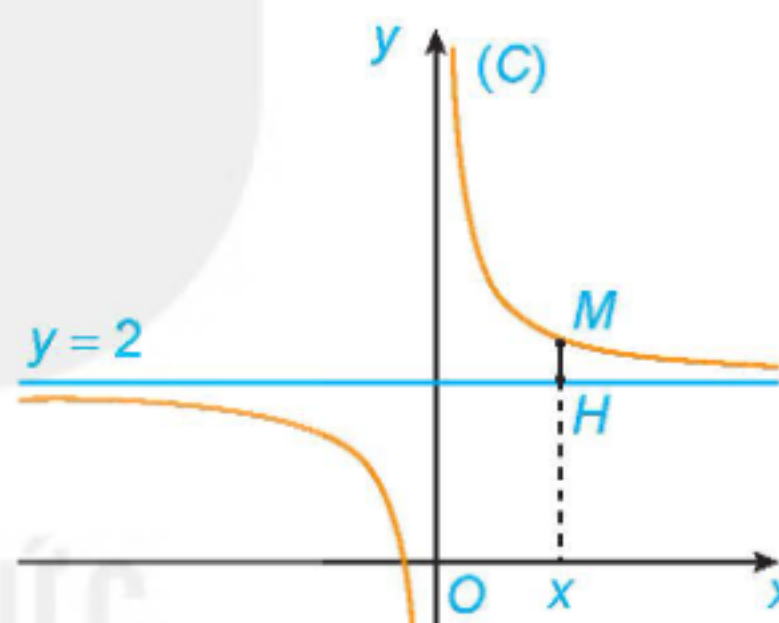


Hình 1.18

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

» HỎI. Nhận biết đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x}$ có đồ thị (C). Với $x > 0$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = 2$ (H.1.19).



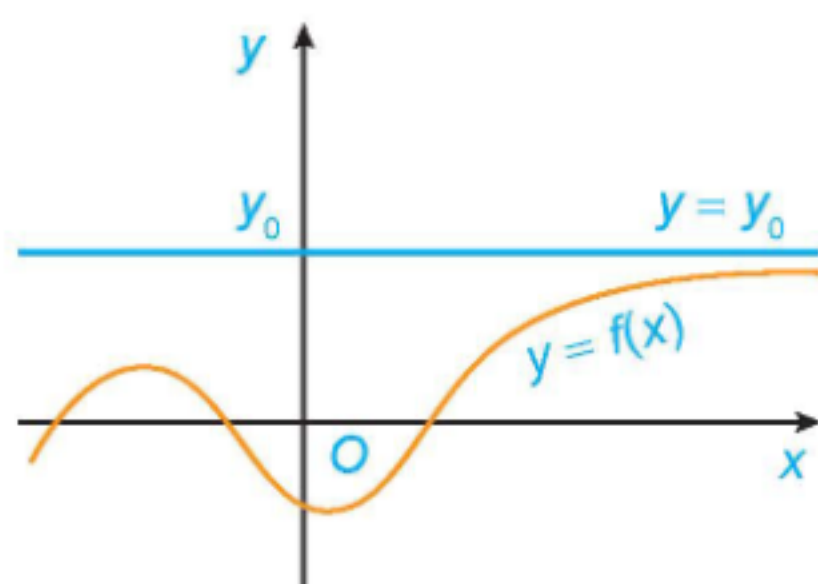
Hình 1.19

a) Tính khoảng cách MH.

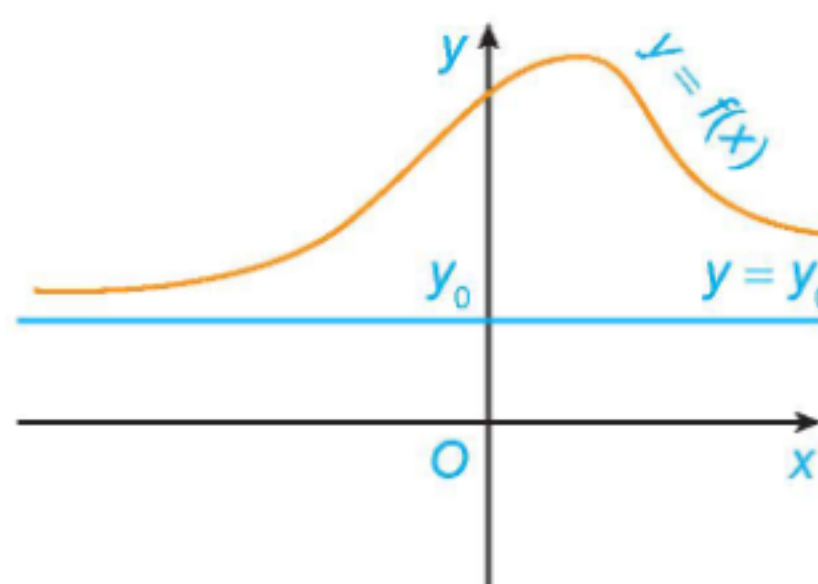
b) Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \rightarrow +\infty$?

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.20

» **Ví dụ 1.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

» **Ví dụ 2.** Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Giải

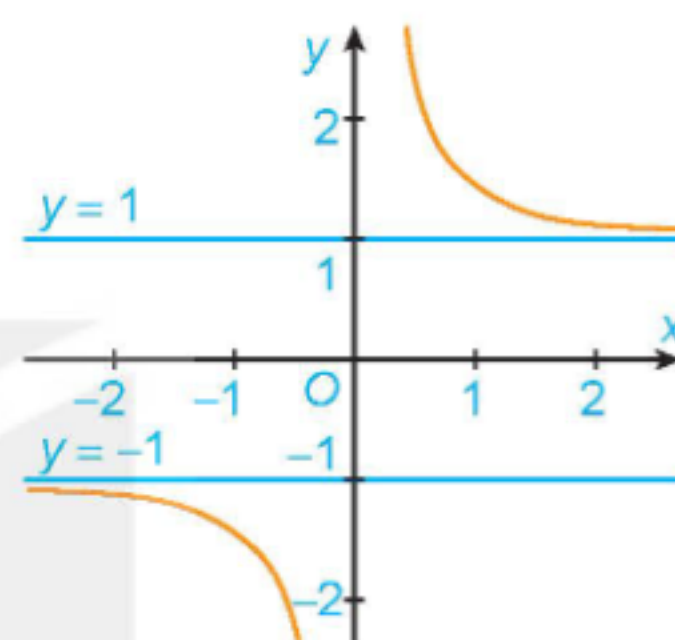
Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.



Hình 1.21

» **Luyện tập 1.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

» **Vận dụng 1.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

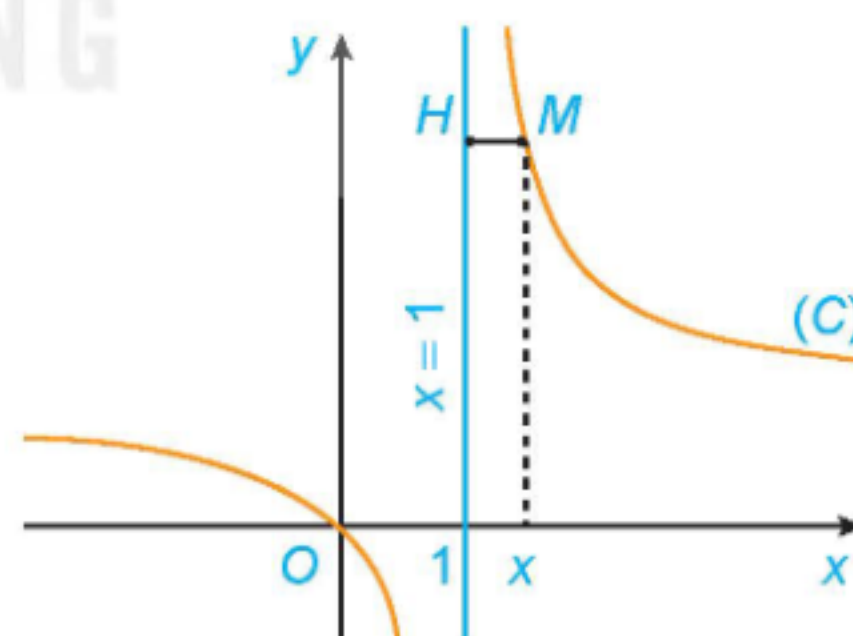
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

» **HĐ2.** Nhận biết đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Với $x > 1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $x = 1$ (H.1.22).

a) Tính khoảng cách MH.

b) Khi M thay đổi trên (C) sao cho khoảng cách MH dần đến 0, có nhận xét gì về tung độ của điểm M?



Hình 1.22

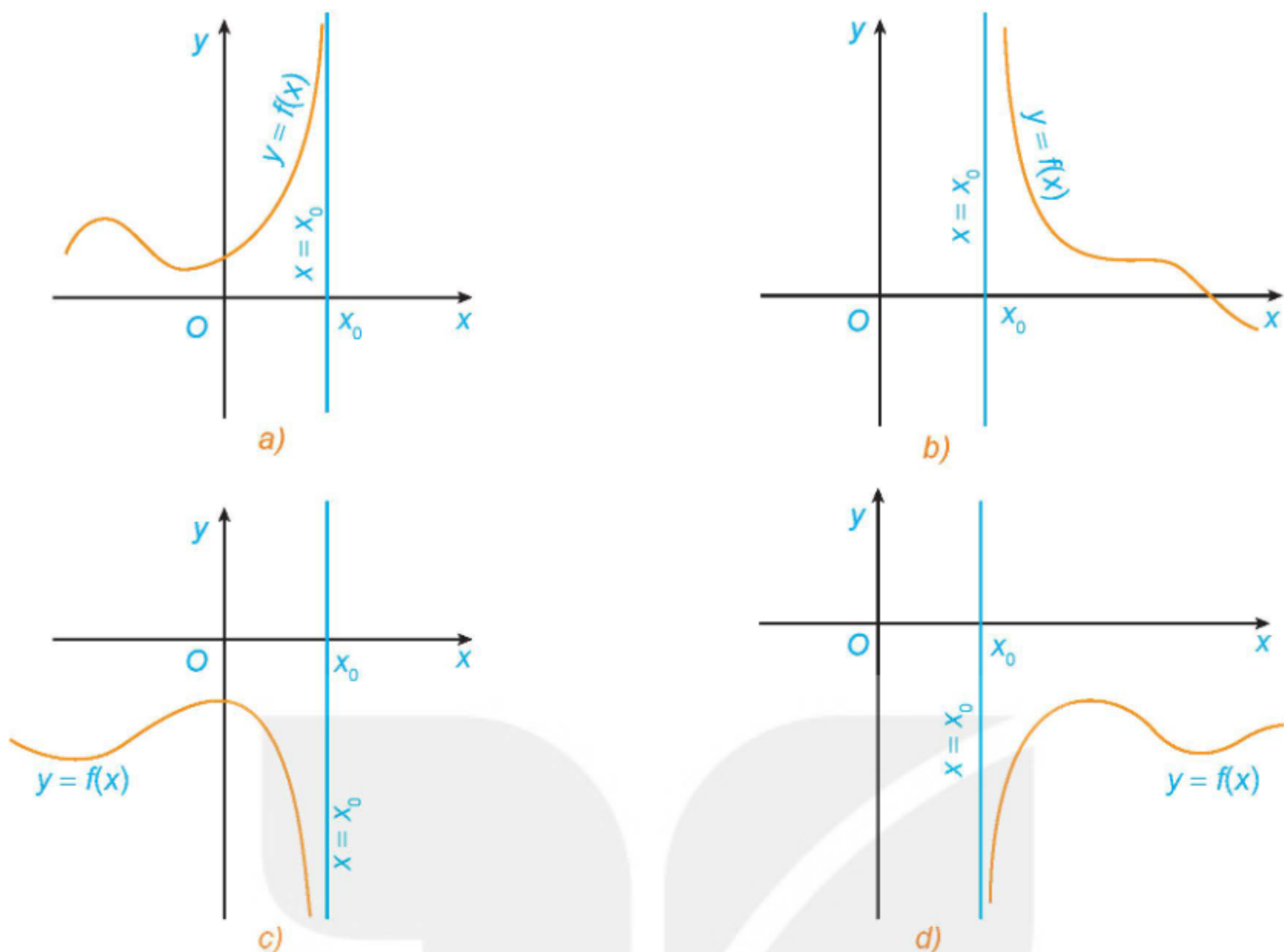
Đường thẳng $x = x_0$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0^+$).

Hình 1.23

» **Ví dụ 3.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

» **Ví dụ 4.** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

» **Luyện tập 2.** Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$.

» **Vận dụng 2.** Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100-p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

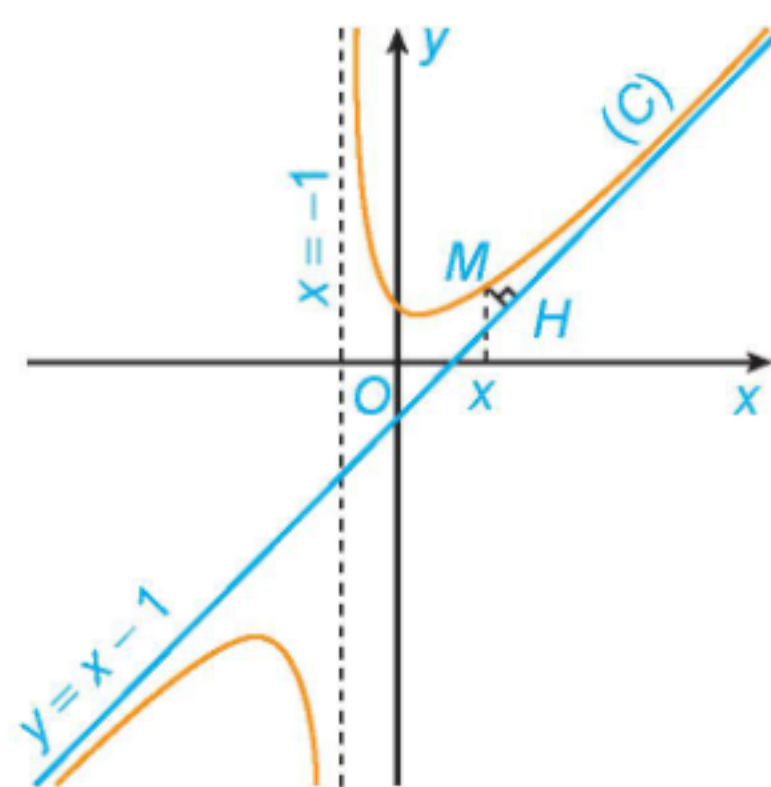
Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

» HỒ 3. Nhận biết đường tiệm cận xiên

Cho hàm số $y = f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = x - 1$ như Hình 1.24.

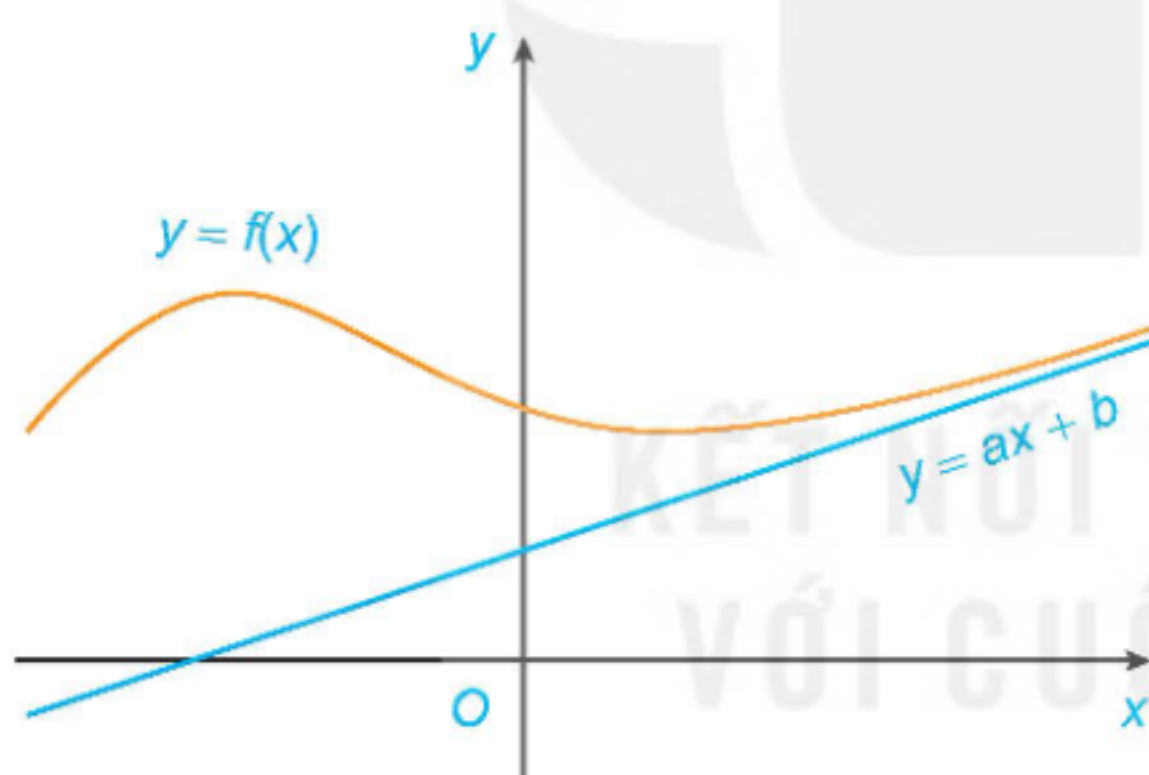
- a) Với $x > -1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = x - 1$. Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \rightarrow +\infty$?
- b) Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$. Tính chất này thể hiện trên Hình 1.24 như thế nào?



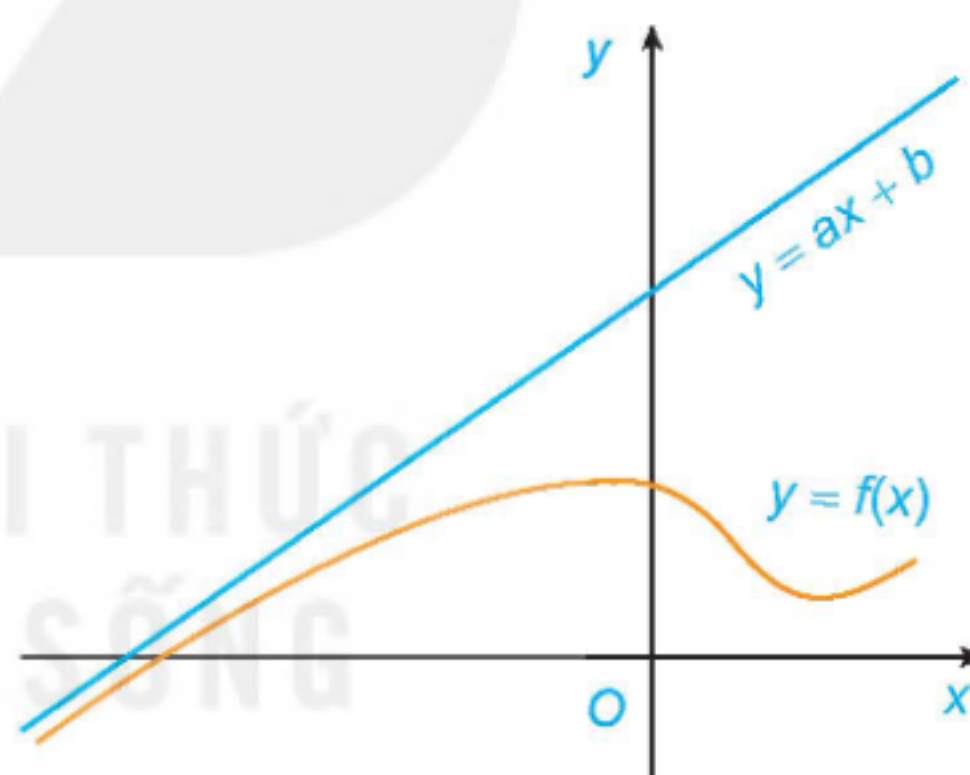
Hình 1.24

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.25

» **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



Chú ý. Ta biết rằng nếu đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] \cdot \frac{1}{x} = 0$.

Từ đây suy ra $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Khi đó, ta có $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

Ngược lại, với a và b xác định như trên, đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đặc biệt, nếu $a = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

» **Ví dụ 6.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Giải

Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Nhận xét. Trong thực hành, để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm phân thức trong Ví dụ 6, ta viết:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{4}{x + 1}.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0;$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

» **Luyện tập 3.** Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{1 - x}$.

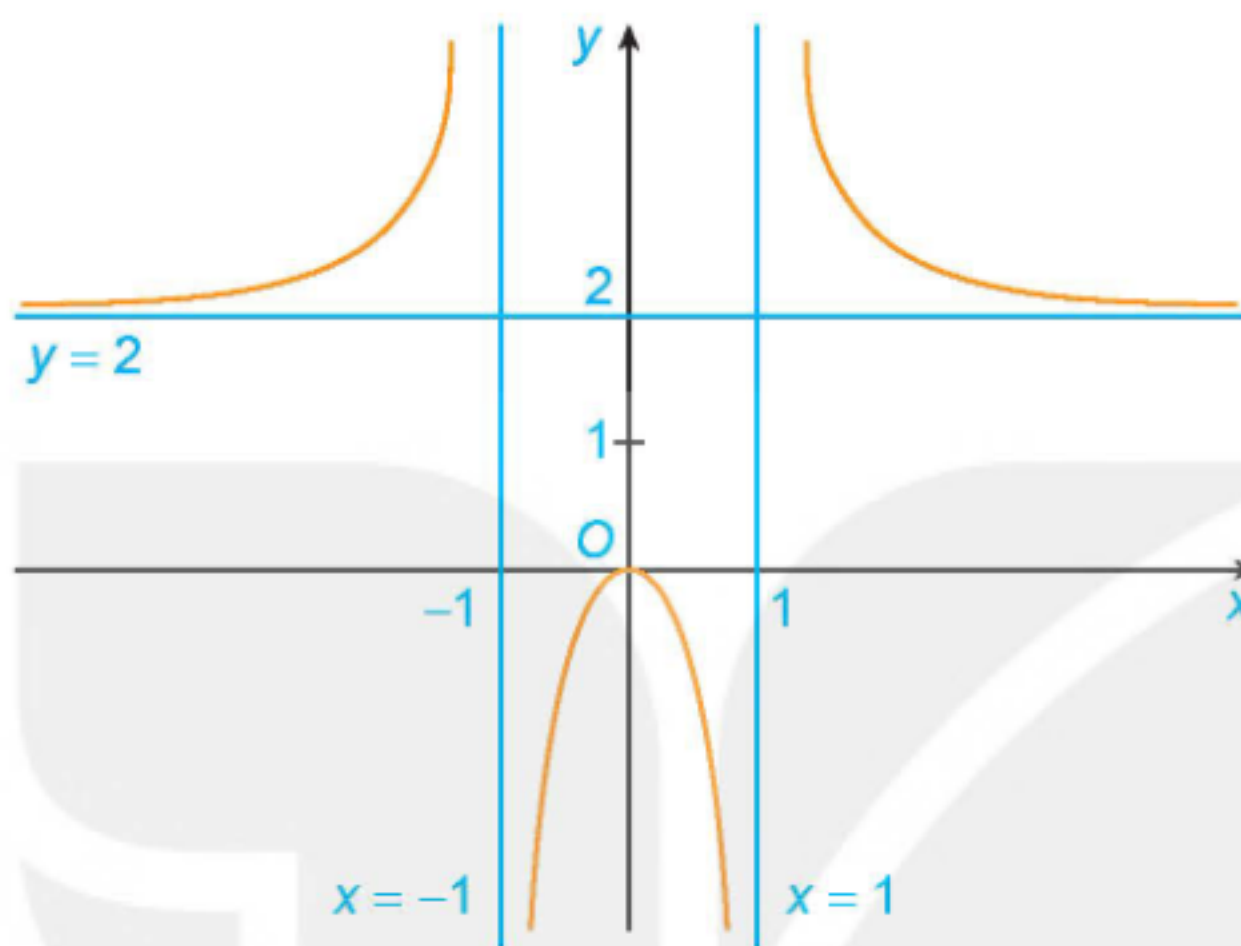
BÀI TẬP

1.16. Hình 1.26 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$.

Sử dụng đồ thị này, hãy:

a) Viết kết quả của các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

b) Chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



Hình 1.26

1.17. Đường thẳng $x = 1$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ không?

1.18. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{3 - x}{2x + 1}$;

b) $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$.

1.19. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng).}$$

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

1.20. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = P(x)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của các kết quả này.

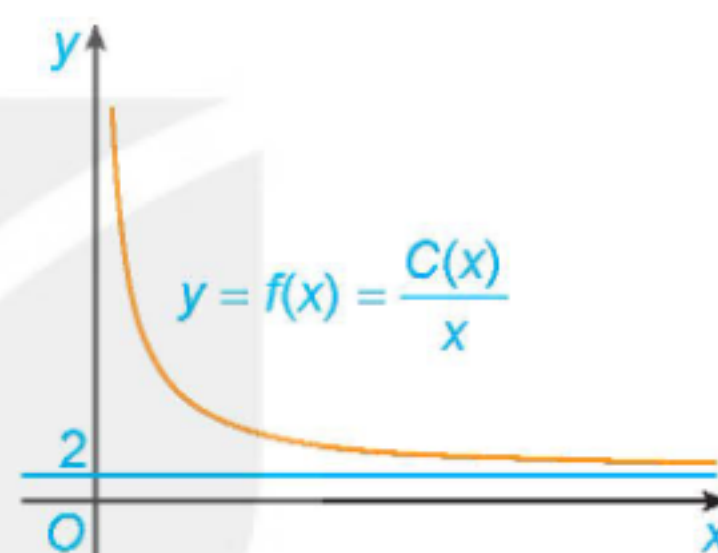
THUẬT NGỮ

- Chiều biến thiên
- Bảng biến thiên
- Cực trị
- Tiệm cận
- Đồ thị
- Tâm đối xứng
- Trục đối xứng

KIẾN THỨC, KỸ NĂNG

- Mô tả sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị).
- Khảo sát tập xác định, chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận, bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số: hàm bậc ba, hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.
- Nhận biết tính đối xứng (trục đối xứng, tâm đối xứng) của đồ thị các hàm số trên.

Một đơn vị sản xuất hàng tiêu dùng ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 45$ (triệu đồng). Khi đó, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $y = f(x) = \frac{C(x)}{x}$. Hãy giải thích tại sao chi phí trung bình giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng/sản phẩm. Điều này thể hiện trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trong Hình 1.27 như thế nào?



Hình 1.27

1. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

» HỎI. Làm quen với việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

- Tính y' và tìm các điểm tại đó $y' = 0$.
- Xét dấu y' để tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và cực trị của hàm số.
- Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và lập bảng biến thiên của hàm số.
- Vẽ đồ thị của hàm số và nhận xét về tính đối xứng của đồ thị.

Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.
 - Tìm cực trị của hàm số.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - Lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý. Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

2. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Trong mục này, ta sử dụng sơ đồ tổng quát ở Mục 1 để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba.

» **Ví dụ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Trên khoảng $(0; 2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 0$.
- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				0		$-\infty$

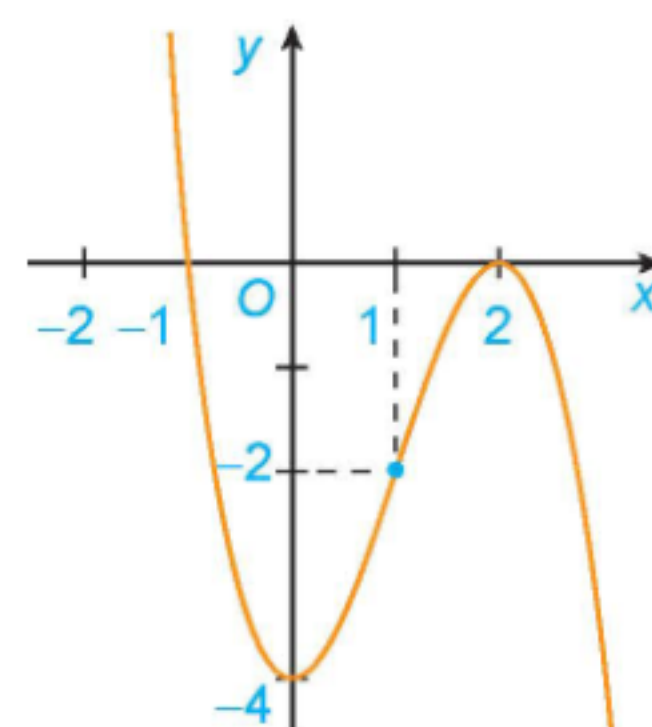
Arrows in the original image indicate the flow of the function: from $+\infty$ at $x = -\infty$ down to -4 at $x = 0$, then up to 0 at $x = 2$, and finally down to $-\infty$ at $x = +\infty$.

3. Đồ thị (H.1.28):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -4)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.
- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1; -2)$.

Chú ý. Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$):

- Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$, hay $x = -\frac{b}{3a}$;
- Không có tiệm cận.



Hình 1.28

» **Ví dụ 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Vậy $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên:

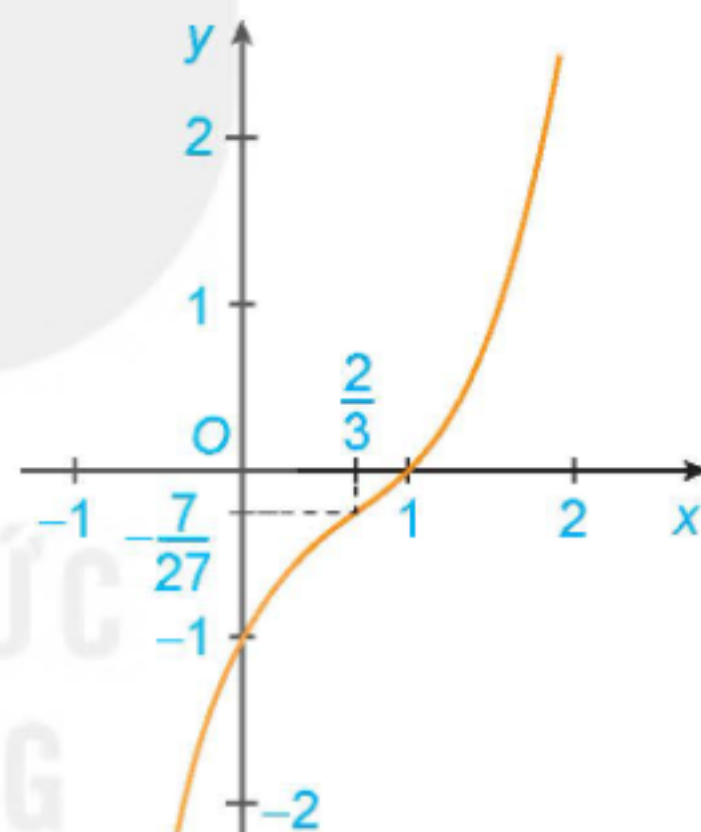
x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

3. Đồ thị (H.1.29):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -1)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1; 0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\frac{2}{3}; -\frac{7}{27}\right)$.



Hình 1.29

» **Luyện tập 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5x$.

3. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Trong mục này, ta sử dụng sơ đồ tổng quát ở Mục 1 để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ đơn giản.

a) Hàm số phân thức $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

» **Ví dụ 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.

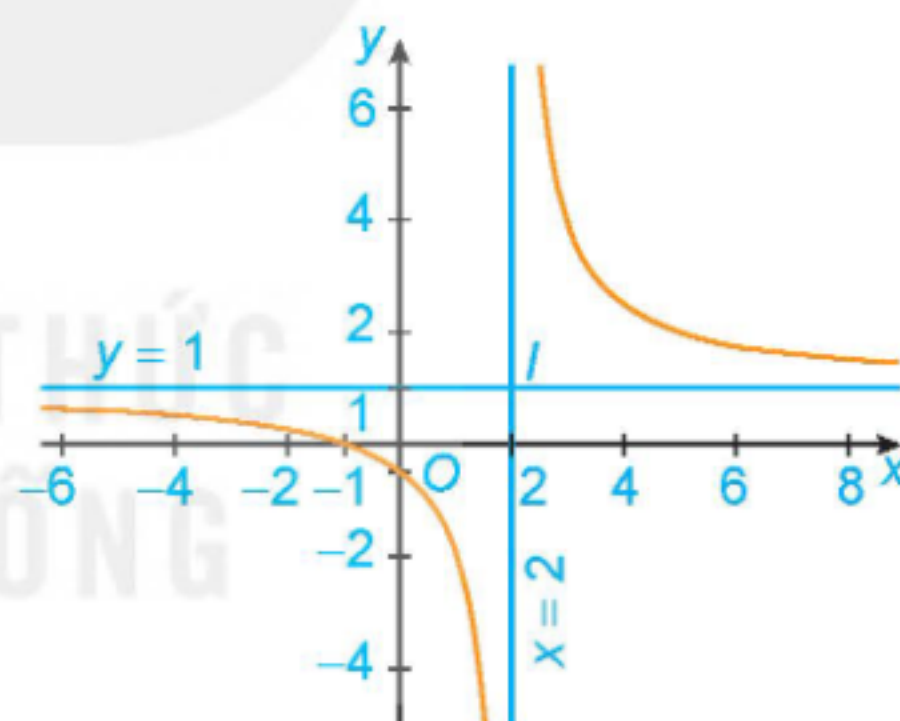
Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1		$+\infty$		1

3. Đồ thị (H.1.30):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.
- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Hình 1.30

Chú ý. Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

» **Luyện tập 2.** Giải bài toán ở tình huống mở đầu, coi $f(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 1$.

» **Vận dụng.** Một bể chứa ban đầu có 200 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 40 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hoà tan).

- Tính thể tích nước và khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút. Từ đó tính nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút.

- b) Coi nồng độ chất khử trùng là hàm số $f(t)$ với $t \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- c) Hãy giải thích tại sao nồng độ chất khử trùng tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

b) Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

» **Ví dụ 4.** Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên: Viết $y = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$.

- Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Tiệm cận: } \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0. \end{aligned}$$

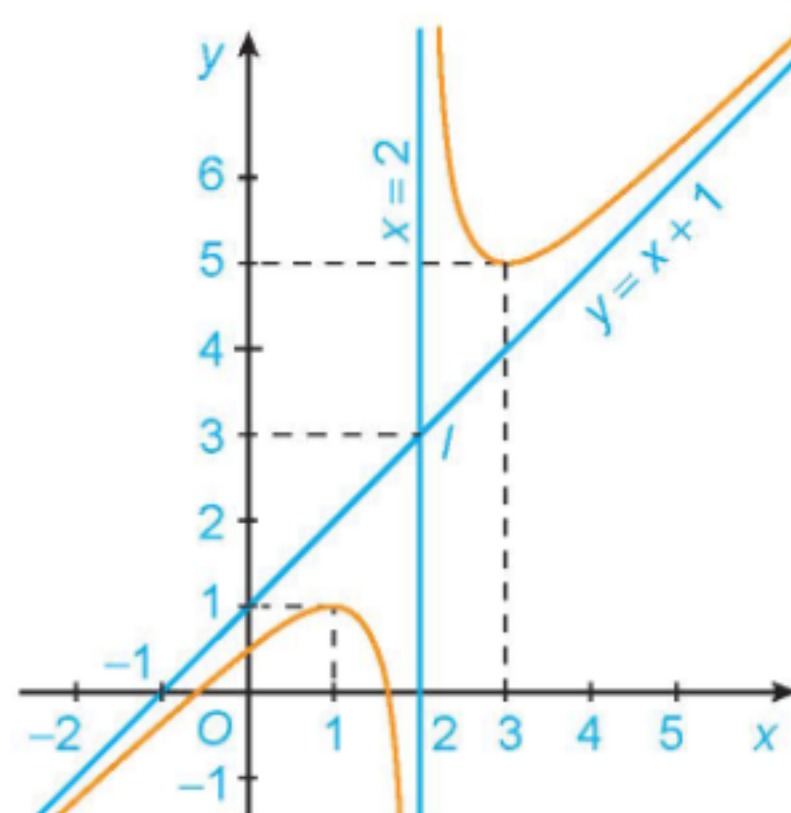
Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	

3. Đồ thị (H.1.31):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.



Hình 1.31

- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

» **Ví dụ 5.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Viết $y = x - \frac{2}{x+1}$, ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- Hàm số không có cực trị.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$.
- Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

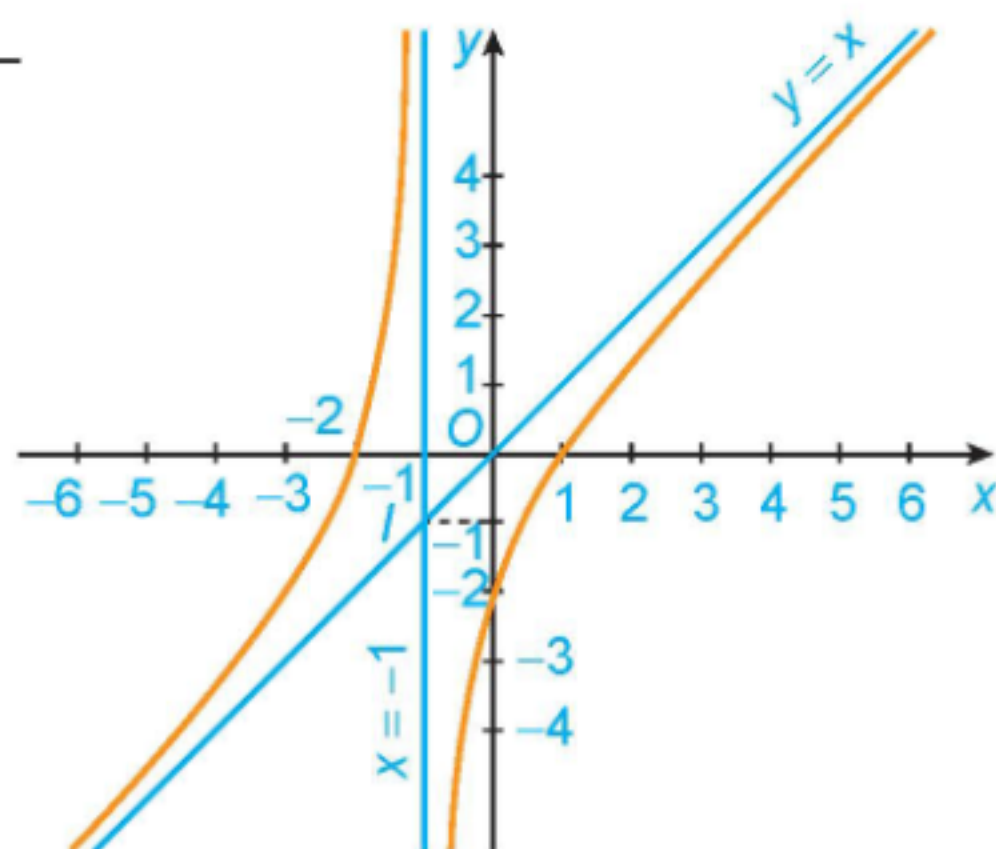
• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$		$+\infty$

3. Đồ thị (H.1.32):

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -2)$.
- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.



Hình 1.32



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

- | | |
|---|---|
| 1. Ngữ văn 12, tập một | 24. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng |
| 2. Ngữ văn 12, tập hai | 25. Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính |
| 3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12 | 26. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính |
| 4. Toán 12, tập một | 27. Mỹ thuật 12 – Thiết kế mỹ thuật đa phương tiện |
| 5. Toán 12, tập hai | 28. Mỹ thuật 12 – Thiết kế đồ họa |
| 6. Chuyên đề học tập Toán 12 | 29. Mỹ thuật 12 – Thiết kế thời trang |
| 7. Lịch sử 12 | 30. Mỹ thuật 12 – Thiết kế mỹ thuật sân khấu, điện ảnh |
| 8. Chuyên đề học tập Lịch sử 12 | 31. Mỹ thuật 12 – Lí luận và lịch sử mỹ thuật |
| 9. Địa lí 12 | 32. Mỹ thuật 12 – Điêu khắc |
| 10. Chuyên đề học tập Địa lí 12 | 33. Mỹ thuật 12 – Kiến trúc |
| 11. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 | 34. Mỹ thuật 12 – Hội họa |
| 12. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 | 35. Mỹ thuật 12 – Đồ họa (tranh in) |
| 13. Vật lí 12 | 36. Mỹ thuật 12 – Thiết kế công nghiệp |
| 14. Chuyên đề học tập Vật lí 12 | 37. Chuyên đề học tập Mỹ thuật 12 |
| 15. Hoá học 12 | 38. Âm nhạc 12 |
| 16. Chuyên đề học tập Hoá học 12 | 39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12 |
| 17. Sinh học 12 | 40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 |
| 18. Chuyên đề học tập Sinh học 12 | 41. Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền |
| 19. Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử | 42. Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá |
| 20. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử | 43. Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông |
| 21. Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thủy sản | 44. Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ |
| 22. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thủy sản | 45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12 |
| 23. Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng | 46. Tiếng Anh 12 – Global Success – Sách học sinh |

Website: <https://www.nxbgd.vn>



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



ISBN 978-604-0-39273-2



9 786040 392732

Giá: 12.500 đ