

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN

11

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

Hình thành kiến thức: Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HO**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HO** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới **khung kiến thức** một cách tự nhiên.

Ví dụ: Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.

Luyện tập: Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.

Vận dụng: Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

Em có thể bắt gặp một **khung chữ** nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào **Khám phá**, **Trải nghiệm**, **Thảo luận**, trả lời , mở rộng hiểu biết cùng **Em có biết?**,...

Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

*Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!*

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Trên tay các em là cuốn *TOÁN 11* của bộ sách “Kết nối tri thức với cuộc sống”. Đúng như tên gọi của bộ sách, các kiến thức trình bày ở đây chủ yếu xuất phát từ những tình huống của cuộc sống quanh ta và trở lại giúp ta giải quyết những vấn đề của cuộc sống. Vì thế, khi học Toán theo cuốn sách này, các em sẽ cảm nhận được rằng, Toán học thật là gần gũi.

Đoạn mở đầu của các chương, các bài học thường đưa ra những tình huống, những ví dụ thực tế cho thấy sự cần thiết phải đưa đến những khái niệm toán học mới. Qua đó, các em sẽ được trau dồi những kĩ năng cần thiết cho một công dân trong thời hiện đại, đó là khả năng “mô hình hoá”. Khi đã đưa vấn đề thực tiễn về bài toán (mô hình toán học), chúng ta sẽ phát hiện thêm những kiến thức toán học mới, để cùng với những kiến thức đã biết giải quyết bài toán thực tiễn đặt ra.

Hi vọng rằng, qua mỗi bài học, mỗi chương sách, qua mỗi vòng lặp từ thực tiễn đến tri thức toán học, rồi từ tri thức toán học quay về thực tiễn, *TOÁN 11* sẽ giúp các em trưởng thành nhanh chóng và trở thành người bạn thân thiết của các em.

Chúc các em thành công cùng *TOÁN 11*!

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác	5
Bài 2. Công thức lượng giác	17
Bài 3. Hàm số lượng giác	22
Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản	31
Bài tập cuối chương I	40

CHƯƠNG II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

Bài 5. Dãy số	42
Bài 6. Cấp số cộng	48
Bài 7. Cấp số nhân	52
Bài tập cuối chương II	56

CHƯƠNG III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 8. Mẫu số liệu ghép nhóm	58
Bài 9. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm	62
Bài tập cuối chương III	69

CHƯƠNG IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 10. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	70
Bài 11. Hai đường thẳng song song	78
Bài 12. Đường thẳng và mặt phẳng song song	84
Bài 13. Hai mặt phẳng song song	88
Bài 14. Phép chiếu song song	95
Bài tập cuối chương IV	102

CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 15. Giới hạn của dãy số	104
Bài 16. Giới hạn của hàm số	111
Bài 17. Hàm số liên tục	119
Bài tập cuối chương V	123

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

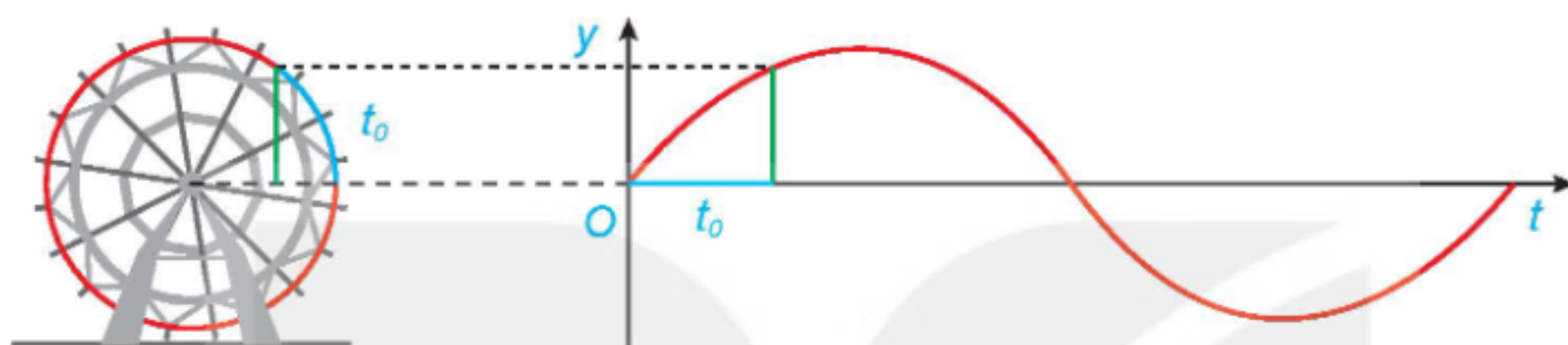
Một vài áp dụng của Toán học trong tài chính	125
Lực căng mặt ngoài của nước	128

Bảng tra cứu thuật ngữ	130
Bảng giải thích thuật ngữ	131

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chương này giới thiệu khái niệm góc lượng giác, giá trị lượng giác của góc lượng giác, các công thức lượng giác cơ bản, hàm số lượng giác, cách giải phương trình lượng giác cơ bản và một số ứng dụng của lượng giác trong thực tiễn.



Bài 1

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

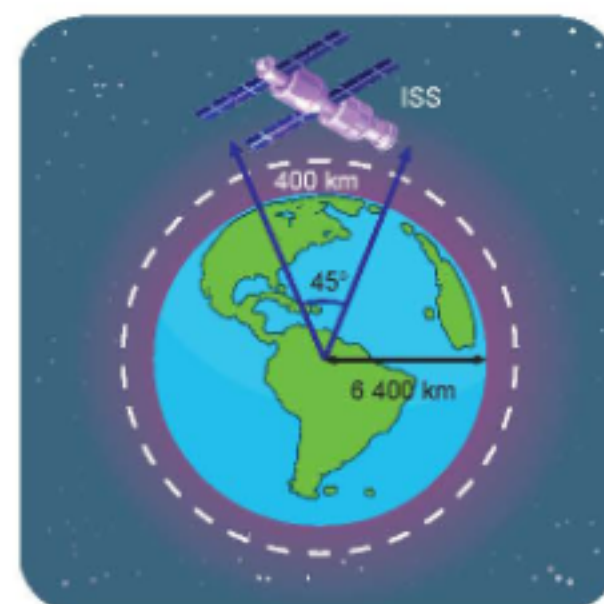
THUẬT NGỮ

- Góc lượng giác
- Số đo của góc lượng giác
- Đường tròn lượng giác
- Giá trị lượng giác của góc lượng giác
- Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác

KIẾN THỨC, KỸ NĂNG

- Nhận biết các khái niệm cơ bản về góc lượng giác.
- Nhận biết khái niệm giá trị lượng giác của một góc lượng giác.
- Mô tả bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác thường gặp; hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác; quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt: bù nhau, phụ nhau, đối nhau, hơn kém nhau π .
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác.

Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km (H.1.1). Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6 400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Hình 1.1

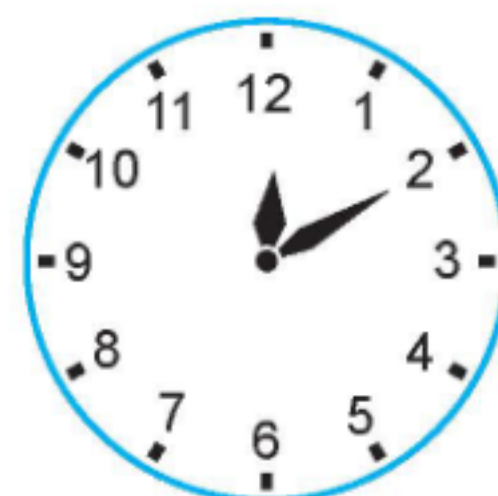
1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

» H01. Nhận biết khái niệm góc lượng giác

Trên đồng hồ ở Hình 1.2, kim phút đang chỉ đúng số 2.

- Phải quay kim phút mấy phần của một vòng tròn theo chiều quay ngược chiều kim đồng hồ để nó chỉ đúng số 12?
- Phải quay kim phút mấy phần của một vòng tròn theo chiều quay của kim đồng hồ để nó chỉ đúng số 12?
- Có bao nhiêu cách quay kim phút theo một chiều xác định để kim phút từ vị trí chỉ đúng số 2 về vị trí chỉ đúng số 12?

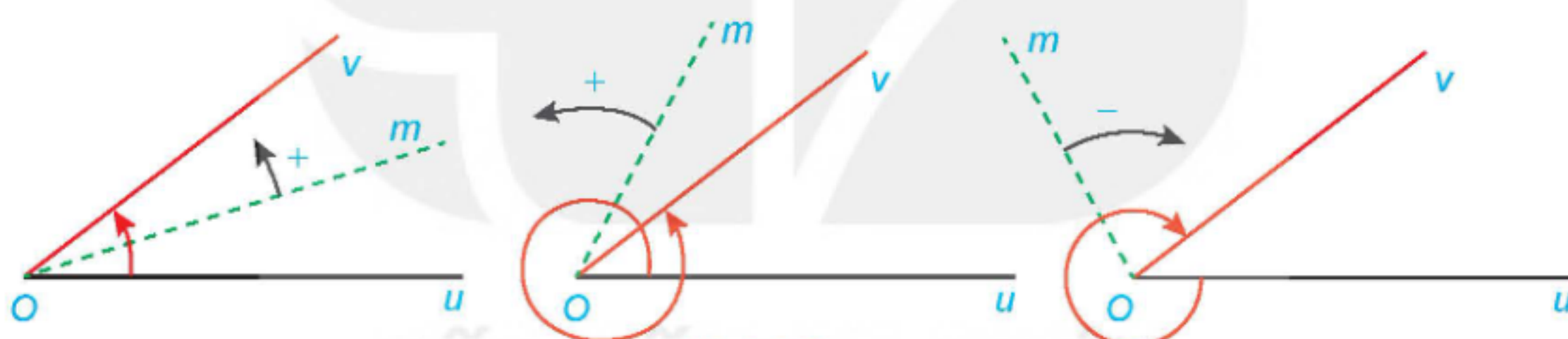


12 giờ 10 phút

Hình 1.2

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou , Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một **góc lượng giác** với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

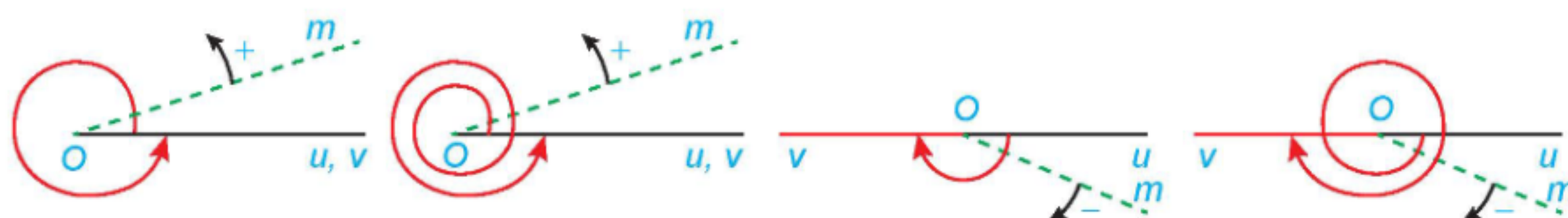
Góc lượng giác (Ou, Ov) chỉ được xác định khi ta biết được chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov (H.1.3). Ta quy ước: Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là *chiều dương*, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là *chiều âm*.



Hình 1.3

Khi đó, nếu tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng ta nói tia Om quay góc 360° , quay đúng 2 vòng ta nói nó quay góc 720° ; quay theo chiều âm nửa vòng ta nói nó quay góc -180° , quay theo chiều âm 1,5 vòng ta nói nó quay góc $-1,5 \cdot 360^\circ = -540^\circ$, ...

Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° . **Số đo của góc lượng giác** có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sđ(Ou, Ov)$.



$$sđ(Ou, Ov) = 360^\circ$$

$$sđ(Ou, Ov) = 720^\circ$$

$$sđ(Ou, Ov) = -180^\circ$$

$$sđ(Ou, Ov) = -540^\circ$$

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó.

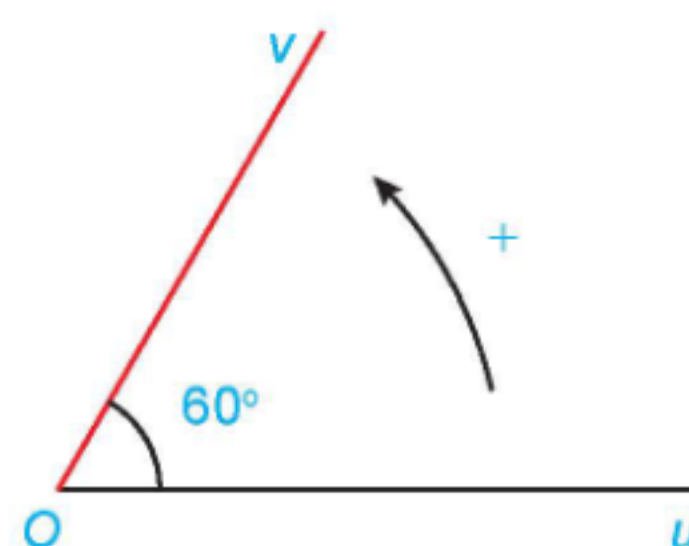
Chú ý. Cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi góc lượng giác như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov) . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của 360° .

» **Ví dụ 1.** Cho góc hình học uOv có số đo 60° (H.1.4). Xác định số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) và (Ov, Ou) .

Giải

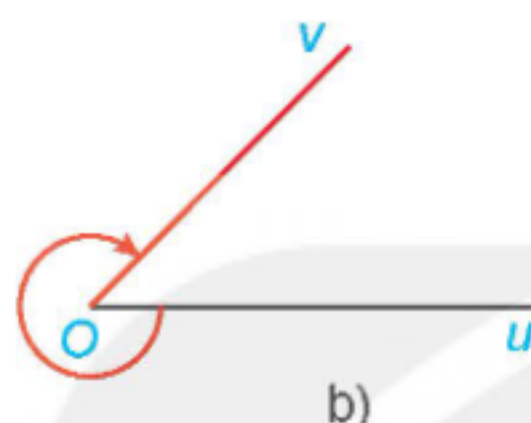
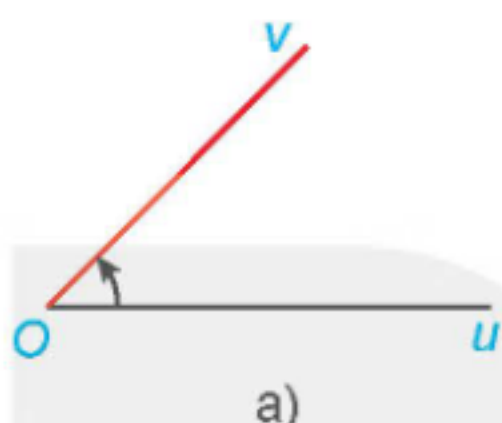
Ta có:

- Các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov có số đo là $sđ(Ou, Ov) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
- Các góc lượng giác tia đầu Ov , tia cuối Ou có số đo là $sđ(Ov, Ou) = -60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.



Hình 1.4

» **Luyện tập 1.** Cho góc hình học $\widehat{uOv} = 45^\circ$. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) trong mỗi trường hợp sau:

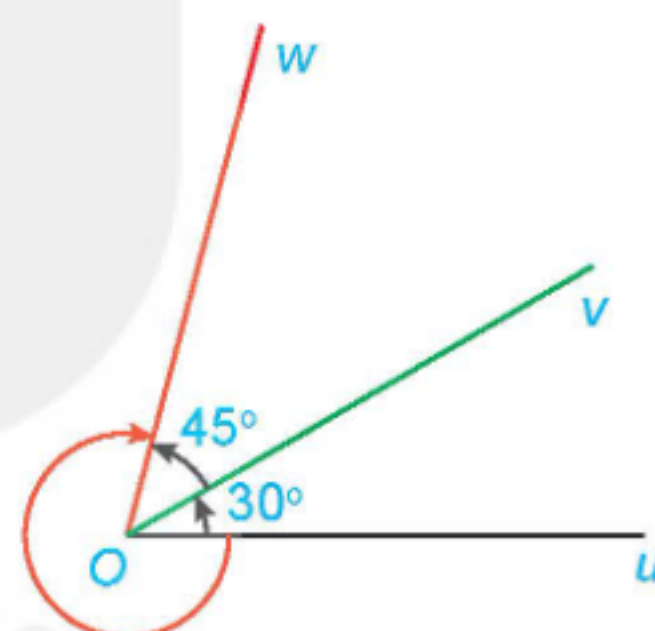


b) Hệ thức Chasles

» **HĐ2.** Nhận biết hệ thức Chasles

Cho ba tia Ou, Ov, Ow với số đo của các góc hình học uOv và vOw lần lượt là 30° và 45° .

- Xác định số đo của ba góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Ow) và (Ou, Ow) được chỉ ra ở Hình 1.5.
- Với các góc lượng giác ở câu a, chứng tỏ rằng có một số nguyên k để $sđ(Ou, Ov) + sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou, Ow) + k360^\circ$.



Hình 1.5

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có $sđ(Ou, Ov) + sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou, Ow) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét. Từ hệ thức Chasles, ta suy ra:

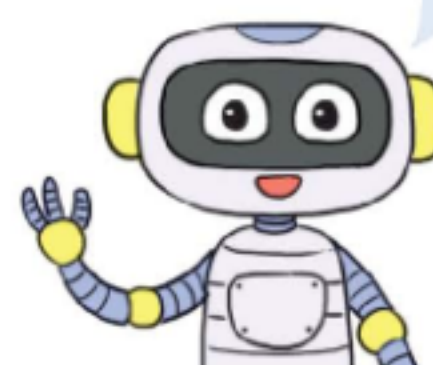
Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov , ta có

$$sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

» **Ví dụ 2.** Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

Hệ thức này tương tự công thức $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.



Giải

Số đo của các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov là

$$sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k360^\circ$$

$$= 135^\circ - (-270^\circ) + k360^\circ = 405^\circ + k360^\circ$$

$$= 45^\circ + (k+1)360^\circ = 45^\circ + m360^\circ \quad (m = k+1, m \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $45^\circ + m360^\circ \quad (m \in \mathbb{Z})$.

» **Luyện tập 2.** Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 240° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a) Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

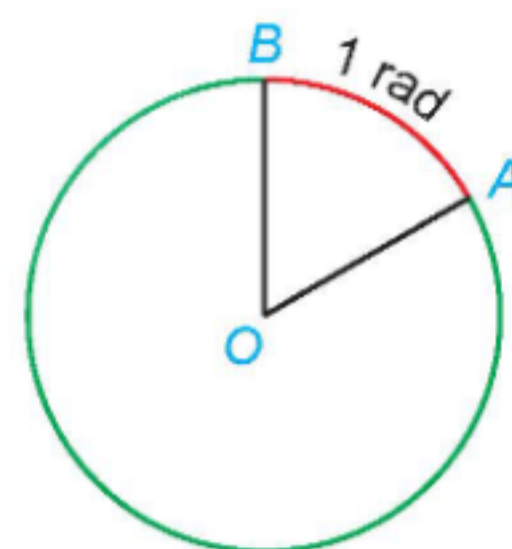
Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

Đối với các góc lượng giác, khi mà số vòng quay trong chuyển động tương ứng từ tia đầu đến tia cuối là khá lớn thì số đo của chúng tính bằng độ sẽ trở nên cồng kềnh. Do đó, trong khoa học và kĩ thuật, bên cạnh việc đo bằng độ, người ta còn sử dụng đơn vị đo góc bằng radian.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) (H.1.6).

Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R .

Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết: $\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}$.



Hình 1.6

Quan hệ giữa độ và radian: Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo $2\pi \text{ rad}$. Mặt khác, đường tròn có số đo bằng 360° nên ta có $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$.

Do đó ta viết:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Chú ý. Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

» Ví dụ 3

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 45° ; 150° .

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$.

Giải

a) Ta có:

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4};$$

$$150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Ta có:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ;$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ.$$

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$



$$\alpha \text{ rad} = \alpha \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$



» Luyện tập 3

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 360° ; -450° ;

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: 3π ; $-\frac{11\pi}{5}$.

Chú ý. Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng radian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180° .

Số đo độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Số đo radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

b) Độ dài cung tròn

» H03. Xây dựng công thức tính độ dài của cung tròn

Cho đường tròn bán kính R .

a) Độ dài của cung tròn có số đo bằng 1 rad là bao nhiêu?

b) Tính độ dài l của cung tròn có số đo α rad.

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$.

» Ví dụ 4. Cho đường tròn bán kính 2 cm. Tính độ dài cung tròn có số đo $\frac{2\pi}{3}$ của đường tròn đó.

Giải

Độ dài của cung tròn đó là: $l = R\alpha = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ (cm).

» Vận dụng 1. Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Đường tròn lượng giác

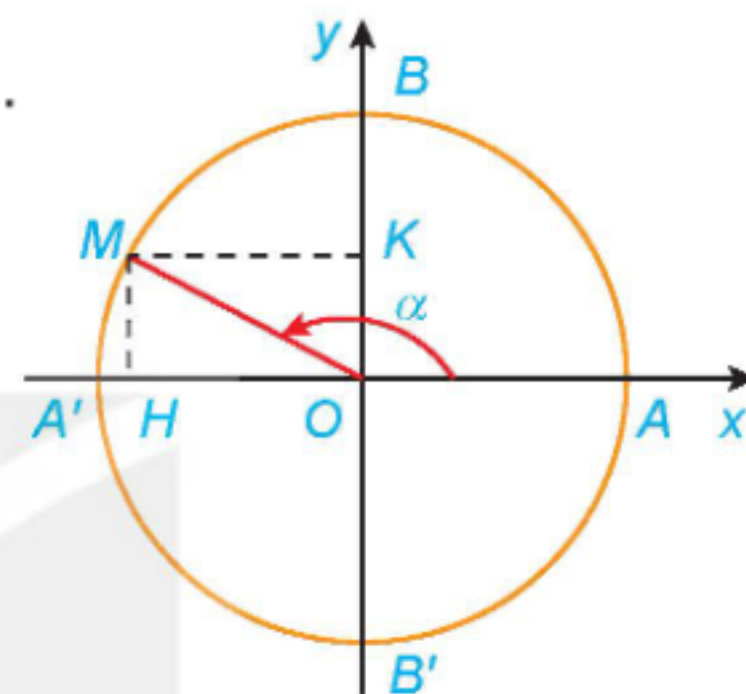
» HD4. Nhận biết khái niệm đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = 1$. Chọn điểm gốc của đường tròn là giao điểm $A(1; 0)$ của đường tròn với trục Ox . Ta quy ước chiều dương của đường tròn là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều âm là chiều quay của kim đồng hồ.

a) Xác định điểm M trên đường tròn sao cho $sđ(OA, OM) = \frac{5\pi}{4}$.

b) Xác định điểm N trên đường tròn sao cho $sđ(OA, ON) = -\frac{7\pi}{4}$.

- **Đường tròn lượng giác** là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- **Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α** (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$.



Hình 1.7

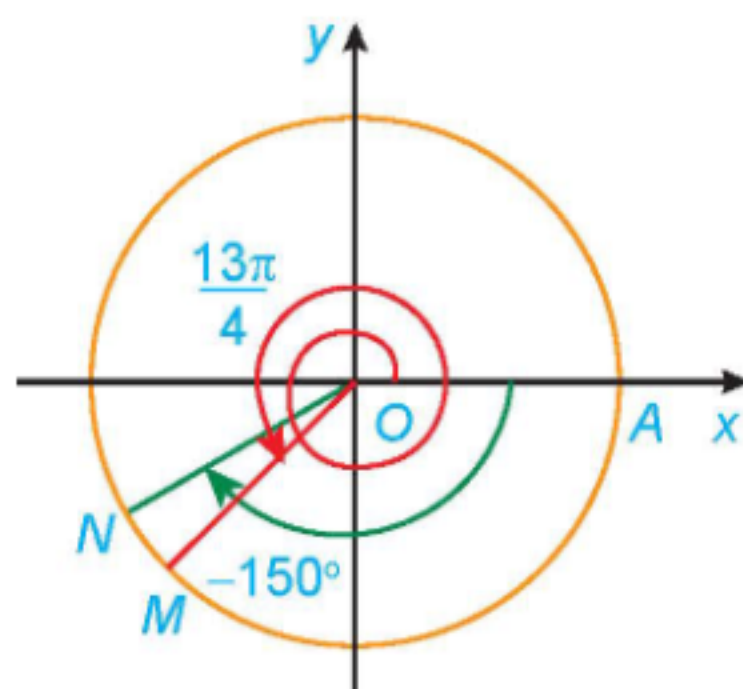
» Ví dụ 5. Xác định các điểm M và N trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc

lượng giác có số đo bằng $\frac{13\pi}{4}$ và -150° .

Giải

Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{13\pi}{4}$ được xác định trong Hình 1.8.

Điểm N trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -150° được xác định trong Hình 1.8.



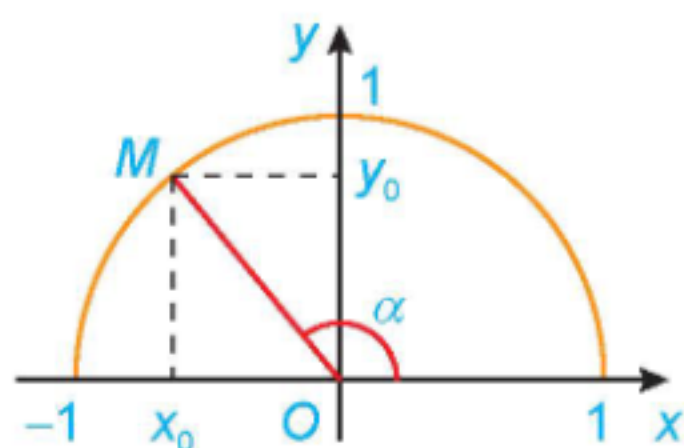
Hình 1.8

» Luyện tập 4. Xác định các điểm M và N trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc

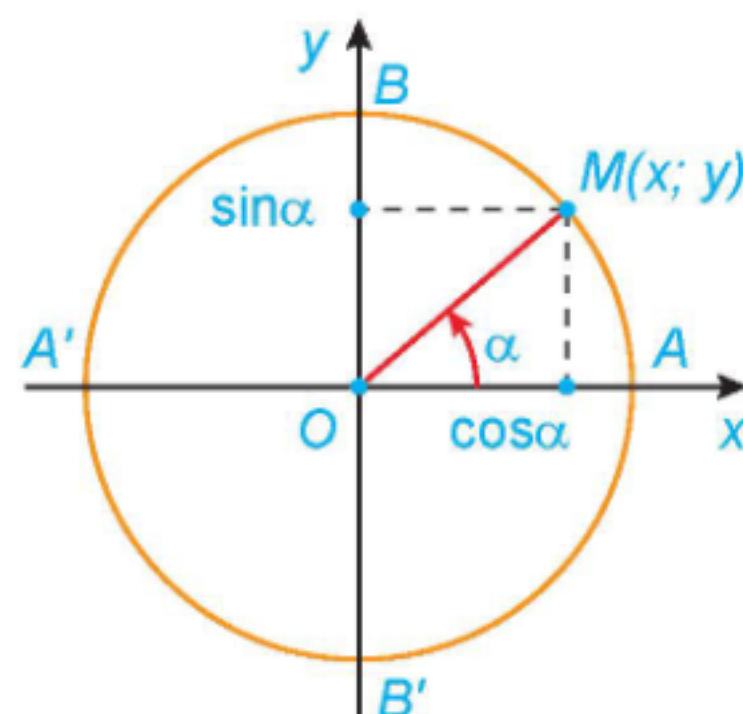
lượng giác có số đo bằng $-\frac{15\pi}{4}$ và 420° .

b) Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

» **H05.** Nhắc lại khái niệm các giá trị lượng giác $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ của góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) đã học ở lớp 10 (H.1.9a).



Hình 1.9a



Hình 1.9b

Ta có thể mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các góc lượng giác có số đo tùy ý như sau: Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α (H.1.9b).

- Hoành độ x của điểm M được gọi là **côsin** của α , kí hiệu là $\cos \alpha$.
$$\cos \alpha = x.$$
- Tung độ y của điểm M được gọi là **sin** của α , kí hiệu là $\sin \alpha$.
$$\sin \alpha = y.$$
- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là **tang** của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$
- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là **côtang** của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.
$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$
- Các giá trị $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác** của α .

Chú ý

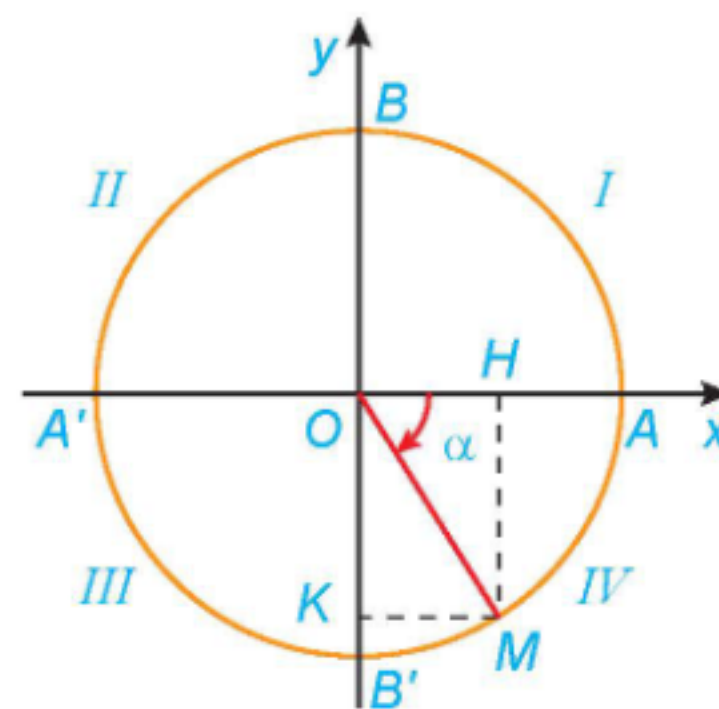
a) Ta còn gọi trục tung là **trục sin**, trục hoành là **trục côsin**.

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

- $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác (H.1.10).

Góc phần tư \ Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Hình 1.10

» **Ví dụ 6.** Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

- Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.
- Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

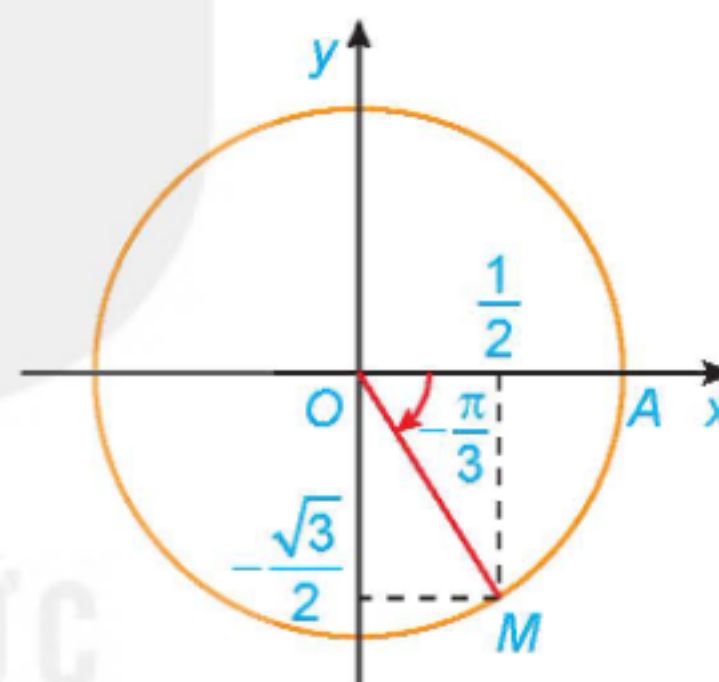
Giải

- Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo là $-\frac{\pi}{3}$ được xác định trong Hình 1.11.

- Ta có:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}; \quad \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Hình 1.11

» **Luyện tập 5.** Cho góc lượng giác có số đo bằng $\frac{5\pi}{6}$.

- Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.
- Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

c) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

d) Sử dụng máy tính cầm tay để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc

Có thể dùng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của góc lượng giác và đổi số đo độ của cung tròn ra radian và ngược lại.

» **Ví dụ 7.** Sử dụng máy tính cầm tay để tính: $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; $\tan 63^\circ 52' 41''$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư).

Giải

Tính	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$	SHIFT MODE 4 sin (-) 9 SHIFT (π) $\div$ 4) =	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,7071
$\tan 63^\circ 52' 41''$	SHIFT MODE 3 tan 6 3 °" 5 2 °" 4 1 °") =	2.039276645	2,0393

» **Ví dụ 8.** a) Đổi $33^\circ 45'$ sang radian; b) Đổi $\frac{3}{4}$ (rad) sang độ.

Giải

Đổi số đo	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$33^\circ 45'$	SHIFT MODE 2 3 3 °" 4 5 °" SHIFT (DRG▶) 1 =	$\frac{3}{16}\pi$	$\frac{3}{16}\pi$ (rad)
$\frac{3}{4}$ (rad)	SHIFT MODE 3 (3 $\div$ 4) SHIFT (DRG▶) 2 = °"	42°58'18.6"	42°58'19"

» **Luyện tập 6.** Sử dụng máy tính cầm tay để:

- Tính: $\cos \frac{3\pi}{7}$; $\tan(-37^\circ 25')$;
- Đổi $179^\circ 23' 30''$ sang radian;
- Đổi $\frac{7}{9}$ (rad) sang độ.

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a) Các công thức lượng giác cơ bản

» **HĐ6.** Nhận biết các công thức lượng giác cơ bản

- Dựa vào định nghĩa của $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, hãy tính $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.
- Sử dụng kết quả của HĐ6a và định nghĩa của $\tan \alpha$, hãy tính $1 + \tan^2 \alpha$.

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các **hệ thức cơ bản** sau:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}) \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).\end{aligned}$$

» **Ví dụ 9.** Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Giải

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Do đó, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

» **Luyện tập 7.** Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

b) Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

» **HĐ7.** Nhận biết liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc đối nhau

Xét hai điểm M, N trên đường tròn lượng giác xác định bởi hai góc đối nhau (H1.12a).

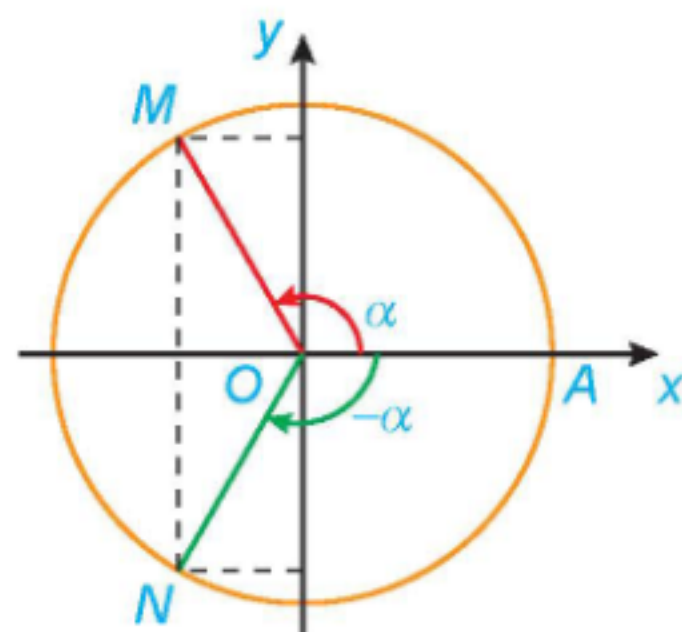
a) Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M, N đối với hệ trục Oxy? Từ đó rút ra liên hệ giữa: $\cos(-\alpha)$ và $\cos \alpha$; $\sin(-\alpha)$ và $\sin \alpha$.

b) Từ kết quả HĐ7a, rút ra liên hệ giữa: $\tan(-\alpha)$ và $\tan \alpha$; $\cot(-\alpha)$ và $\cot \alpha$.

Với kết quả HĐ7, ta có liên hệ giữa các giá trị lượng giác:

- Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha.\end{aligned}$$

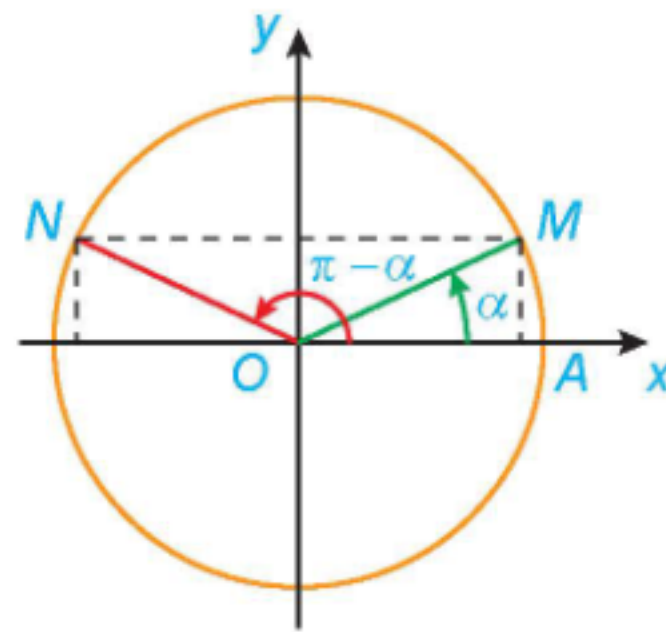


Hình 1.12a

Tương tự HĐ7, ta cũng có liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc bù nhau, phụ nhau và hơn kém π , như sau:

- Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

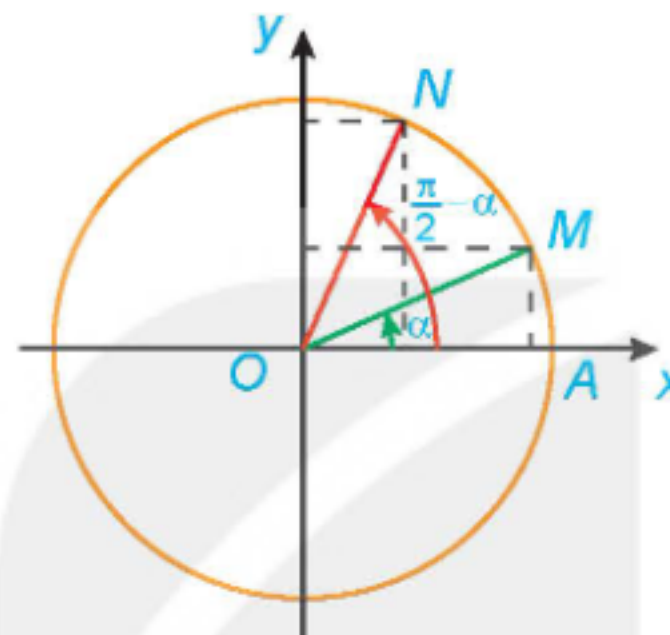
$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha.\end{aligned}$$



Hình 1.12b

- Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

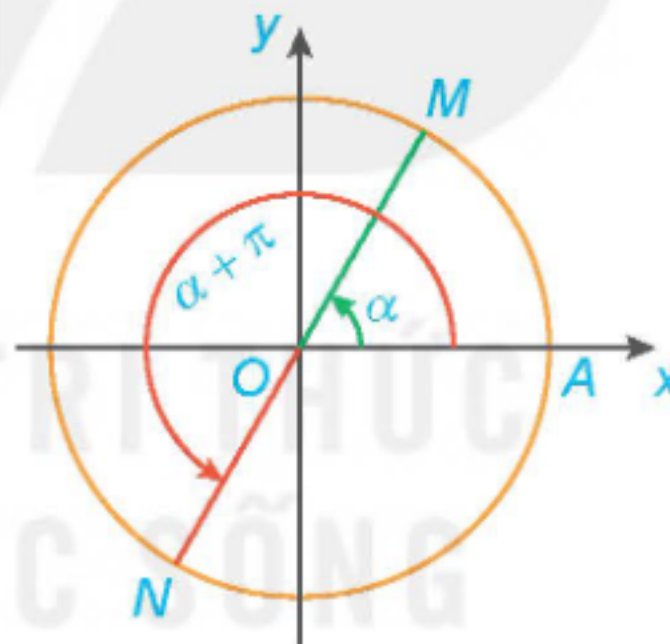
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$



Hình 1.12c

- Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha.\end{aligned}$$



Hình 1.12d

Chú ý. Nhờ các công thức trên, ta có thể đưa việc tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì về việc tính giá trị lượng giác của góc α với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

» **Ví dụ 10.** Tính: a) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$; b) $\cot(-675^\circ)$.

Giải. Ta có:

$$\text{a) } \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\frac{11\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b) } \cot(-675^\circ) = \cot(45^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \cot 45^\circ = 1.$$

» **Luyện tập 8.** Tính: a) $\sin(-675^\circ)$; b) $\tan\frac{15\pi}{4}$.

» **Vận dụng 2.** Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12},$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng; c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

BÀI TẬP

1.1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	15°	?	0°	900°	?	?
Số đo radian	?	$\frac{3\pi}{8}$	?	?	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

1.2. Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35° ; d) 315° .

1.3. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

- a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{11\pi}{4}$; c) 150° ; d) -225° .

1.4. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

- a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1.5. Chứng minh các đẳng thức:

- a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$; b) $\frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$.

1.6. Một người đi xe đạp với vận tốc không đổi, biết rằng bánh xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

THUẬT NGỮ

- Công thức cộng
- Công thức nhân đôi
- Công thức biến đổi tích thành tổng
- Công thức biến đổi tổng thành tích

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả các phép biến đổi lượng giác cơ bản: công thức cộng; công thức góc nhân đôi; công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác.

Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

1. CÔNG THỨC CỘNG

» HĐ1. Nhận biết công thức cộng

- a) Cho $a = \frac{\pi}{3}$ và $b = \frac{\pi}{6}$, hãy chứng tỏ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- b) Bằng cách viết $a + b = a - (-b)$ và từ công thức ở HĐ1a, hãy tính $\cos(a + b)$.
- c) Bằng cách viết $\sin(a - b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$ và sử dụng công thức vừa thiết lập ở HĐ1b, hãy tính $\sin(a - b)$.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

(giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).

» Ví dụ 1. Không dùng máy tính, hãy tính:

a) $\cos 75^\circ$;

b) $\tan \frac{\pi}{12}$.

Giải

$$a) \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$b) \tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

» **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x + \cos x.$$

Đẳng thức được chứng minh.

» **Luyện tập 1.** Chứng minh rằng:

$$a) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$b) \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right).$$

» **Vận dụng 1.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

» **HĐ2.** Xây dựng công thức nhân đôi

Lấy $b = a$ trong các công thức cộng, hãy tìm công thức tính: $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

» **Ví dụ 3.** Cho $\cos a = -\frac{1}{3}$ $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi\right)$. Tính $\sin 2a$.

Giải

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi \text{ nên } \sin a > 0. \text{ Do đó } \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

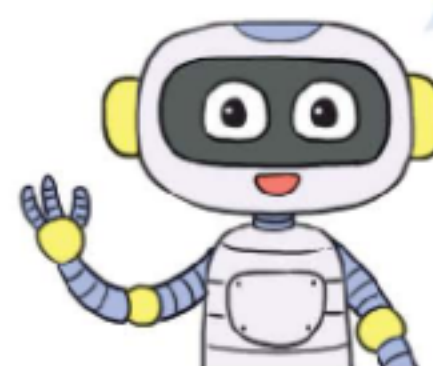
$$\text{Vậy } \sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

» **Luyện tập 2.** Không dùng máy tính, tính $\cos \frac{\pi}{8}$.

Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$



3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

» **HĐ3.** Xây dựng công thức biến đổi tích thành tổng

- a) Từ các công thức cộng $\cos(a+b)$ và $\cos(a-b)$, hãy tìm: $\cos a \cos b$; $\sin a \sin b$.
 b) Từ các công thức cộng $\sin(a+b)$ và $\sin(a-b)$, hãy tìm: $\sin a \cos b$.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

» **Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}; \quad B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ.$$

Giải

Ta có:

$$A = \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos \pi \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{4}.$$

$$B = \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2} [\sin(15^\circ - 75^\circ) + \sin(15^\circ + 75^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(-60^\circ) + \sin 90^\circ] = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

» **Luyện tập 3.** Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ; \quad B = \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

» HỖ 4. Xây dựng công thức biến đổi tổng thành tích

Trong các công thức biến đổi tích thành tổng ở Mục 3, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ và viết các công thức nhận được.

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$$

» Ví dụ 5. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$.

Giải

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{4\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9} = 0.$$

» Luyện tập 4. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức

$$B = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}.$$

» Vận dụng 2. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình 1.13 cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).

- Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
- Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

		Tần số cao		
		1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
		↓	↓	↓
	697 Hz →	1	2	3
	770 Hz →	4	5	6
Tần số thấp	852 Hz →	7	8	9
	941 Hz →	*	0	#

Hình 1.13

BÀI TẬP

1.7. Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15° .

1.8. Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

1.9. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

1.10. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}};$

b) $B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}.$

1.11. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

1.12. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12$ cm.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

b) Sử dụng kết quả ở câu a và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC .

1.13. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

THUẬT NGỮ

- Hàm số lượng giác
- Hàm số chẵn
- Hàm số lẻ
- Hàm số tuần hoàn
- Đồ thị của hàm số lượng giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các khái niệm về hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ thông qua đường tròn lượng giác. Mô tả bảng giá trị của bốn hàm số lượng giác đó trên một chu kì.
- Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
- Giải thích tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn, lẻ; tính tuần hoàn; chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ dựa vào đồ thị.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số lượng giác.

Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức

$$v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3},$$

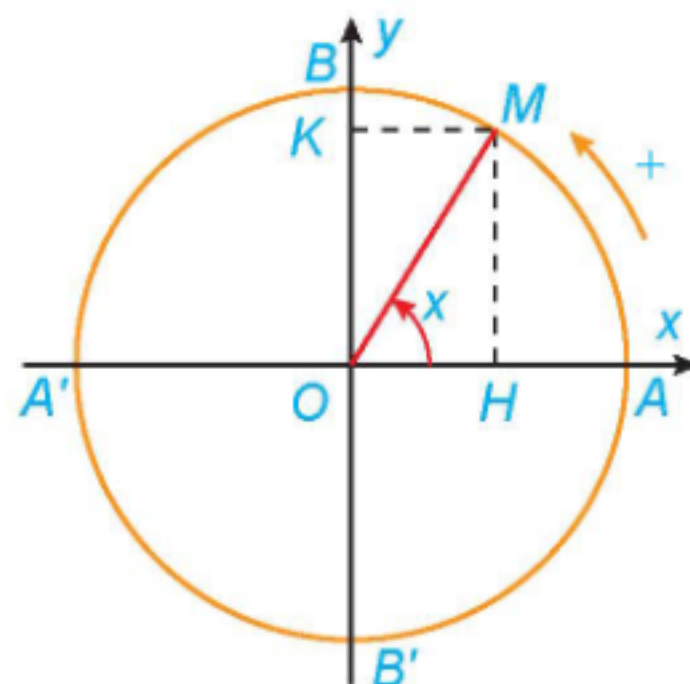
trong đó t là thời gian (tính bằng giây). Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

» H01. Hoàn thành bảng sau:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{\pi}{6}$	?	?	?	?
0	?	?	?	?
$-\frac{\pi}{2}$	?	?	?	?

Với mỗi số thực x , ta xác định được duy nhất một điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng x . Do đó, ta luôn xác định được các giá trị lượng giác $\sin x$ và $\cos x$ của x lần lượt là tung độ và hoành độ của điểm M . Nếu $\cos x \neq 0$, ta định nghĩa $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ và nếu $\sin x \neq 0$, ta định nghĩa $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



Từ đây, ta có định nghĩa sau về các hàm số lượng giác.

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là **hàm số cosin**, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$.

- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y = \tan x$.

Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số cotang**, kí hiệu là $y = \cot x$.

Tập xác định của hàm số cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

» **Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$.

Giải

Biểu thức $\frac{1}{\cos x}$ có nghĩa khi $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

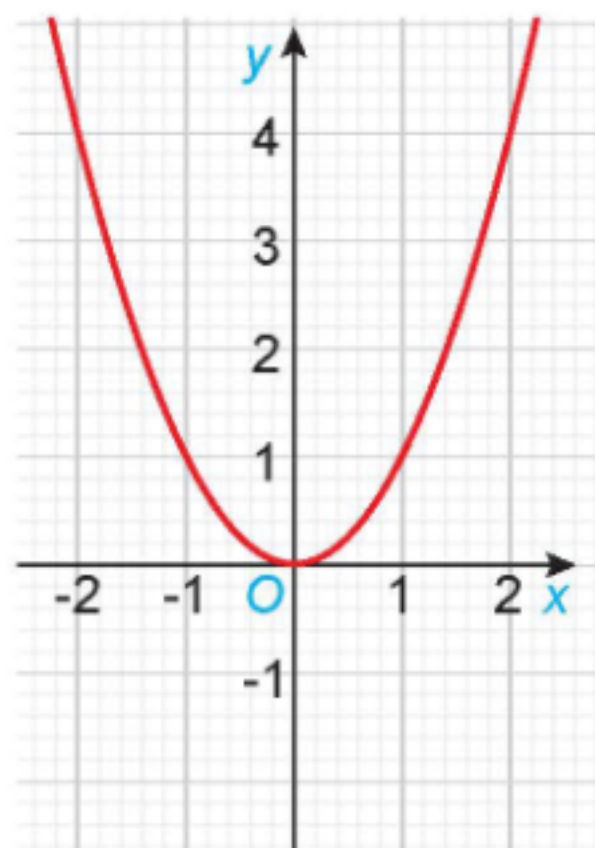
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» **Luyện tập 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$.

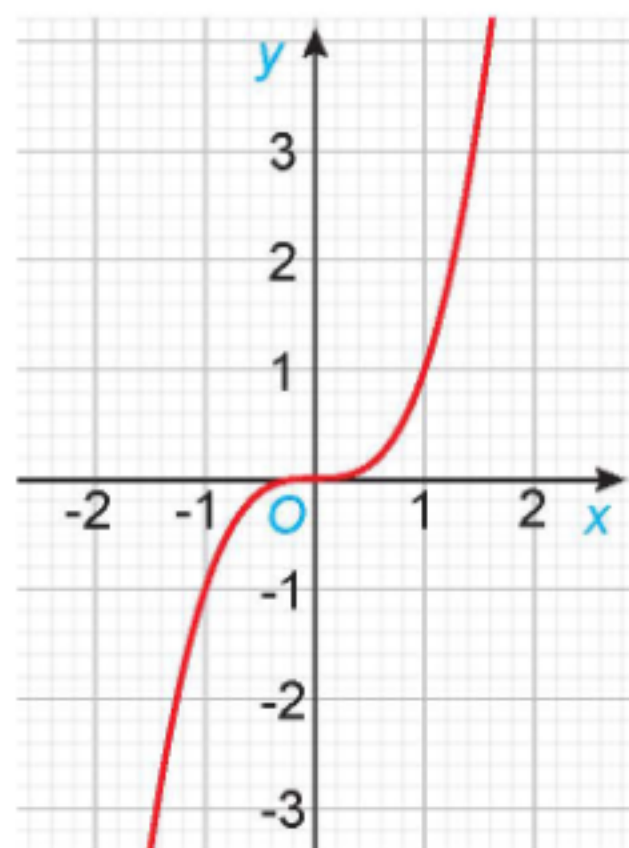
2. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

» **HĐ2.** Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = x^3$, với các đồ thị như hình dưới đây.



Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$



Đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3$

- a) Tìm các tập xác định D_f, D_g của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$.
- b) Chứng tỏ rằng $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối với hệ trục tọa độ Oxy ?
- c) Chứng tỏ rằng $g(-x) = -g(x), \forall x \in D_g$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối với hệ trục tọa độ Oxy ?

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D .

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.

Nhận xét. Để vẽ đồ thị của một hàm số chẵn (tương ứng, lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của hàm số nằm ở bên phải trục tung, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung (tương ứng, qua gốc tọa độ), ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

» **Ví dụ 2.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = x \sin x$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x), \forall x \in D$.

Vậy $f(x) = x \sin x$ là hàm số chẵn.

» **Luyện tập 2.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$.

b) Hàm số tuần hoàn

» **HĐ3.** So sánh:

- a) $\sin(x + 2\pi)$ và $\sin x$; b) $\cos(x + 2\pi)$ và $\cos x$;
c) $\tan(x + \pi)$ và $\tan x$; d) $\cot(x + \pi)$ và $\cot x$.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

- $x + T \in D$ và $x - T \in D$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.



Hàm số hằng $f(x) = c$ (c là hằng số) có phải là hàm số tuần hoàn không? Nếu hàm số tuần hoàn thì nó có chu kì không?

Nhận xét

- a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π . Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
- b) Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T , ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a + T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \dots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

» **Ví dụ 3.** Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$.

Giải

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và với mọi số thực x , ta có:

$$x - \pi \in \mathbb{R}, x + \pi \in \mathbb{R}, \\ \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x.$$

Vậy $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn.

Chú ý. Tổng quát, người ta chứng minh được các hàm số $y = A \sin \omega x$ và $y = A \cos \omega x$ ($\omega \neq 0$) là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

» **Luyện tập 3.** Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \tan 2x$.

3. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \sin x$

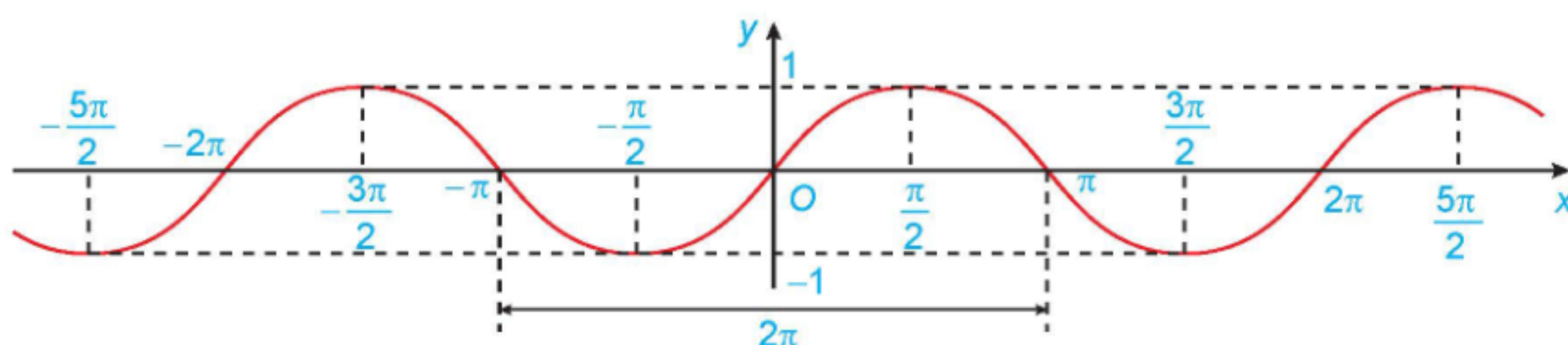
» **HĐ 4.** Cho hàm số $y = \sin x$.

- a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.
- b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ bằng cách tính giá trị của $\sin x$ với những x không âm, sau đó sử dụng kết quả câu a để suy ra giá trị tương ứng của $\sin x$ với những x âm.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \sin x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

- c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các đoạn khác có độ dài bằng chu kỳ $T = 2\pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \sin x$ như hình dưới đây.



Hình 1.14

Từ đồ thị ở Hình 1.14, hãy cho biết tập giá trị, các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \sin x$.

Hàm số $y = \sin x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ 2π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một **đường hình sin**.

» **Ví dụ 4.** Sử dụng đồ thị ở Hình 1.14, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \sin x$:

- a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị dương.

Giải

- a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = 0; x = \pi$.
- b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, thì $y > 0$ khi $x \in (0; \pi)$.

» **Luyện tập 4.** Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \sin x$.

» **Vận dụng 1.** Xét tình huống mở đầu.

- a) Giải bài toán ở tình huống mở đầu.
- b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

4. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cos x$

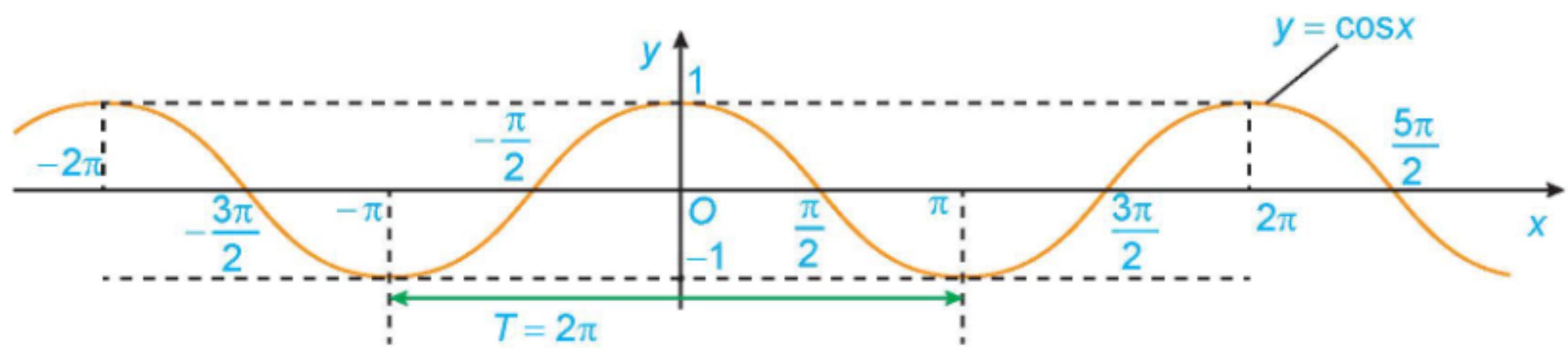
» **HĐ5.** Cho hàm số $y = \cos x$.

- a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.
- b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ bằng cách tính giá trị của $\cos x$ với những x không âm, sau đó sử dụng kết quả câu a để suy ra giá trị tương ứng của $\cos x$ với những x âm.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \cos x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

- c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các đoạn khác có độ dài bằng chu kì $T = 2\pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ như hình dưới đây.



Hình 1.15

Từ đồ thị ở Hình 1.15, hãy cho biết tập giá trị, các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cos x$.

Hàm số $y = \cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.

» **Ví dụ 5.** Sử dụng đồ thị ở Hình 1.15, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \cos x$:

- a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị âm.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

» **Luyện tập 5.** Tìm tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$.

» **Vận dụng 2.** Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5\cos 4\pi t$ (cm).

- a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.
b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

5. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \tan x$

» **HĐ6.** Cho hàm số $y = \tan x$.

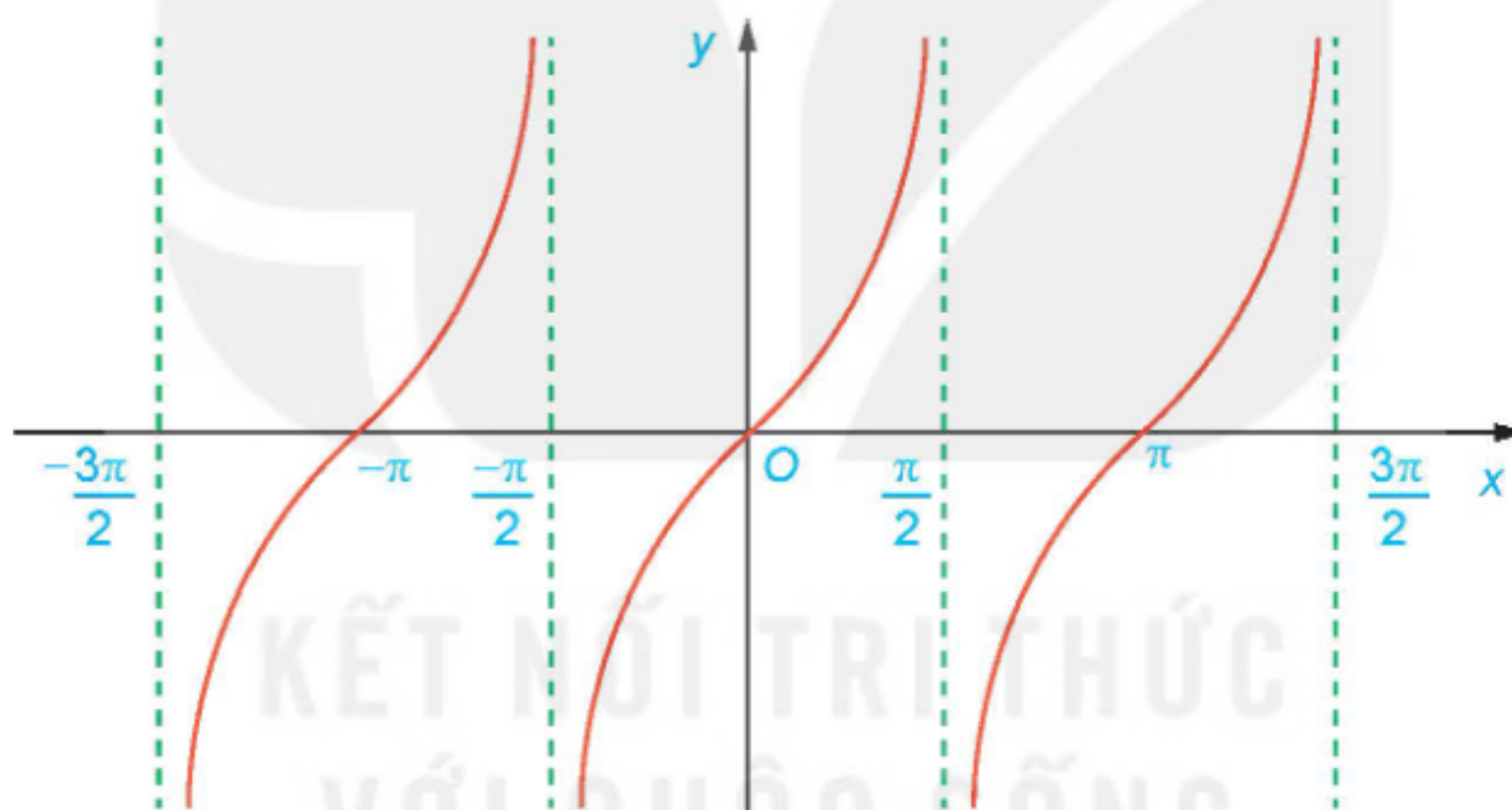
a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \tan x)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các khoảng khác có độ dài bằng chu kì $T = \pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như hình dưới đây.



Hình 1.16

Từ đồ thị ở Hình 1.16, hãy tìm tập giá trị và các khoảng đồng biến của hàm số $y = \tan x$.

Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

» **Ví dụ 6.** Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.16, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$:

- a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị dương.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\pi; x = 0; x = \pi$.

b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra

trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ thì $y > 0$ khi $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

» **Luyện tập 6.** Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.16, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn

$\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị âm.

6. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cot x$

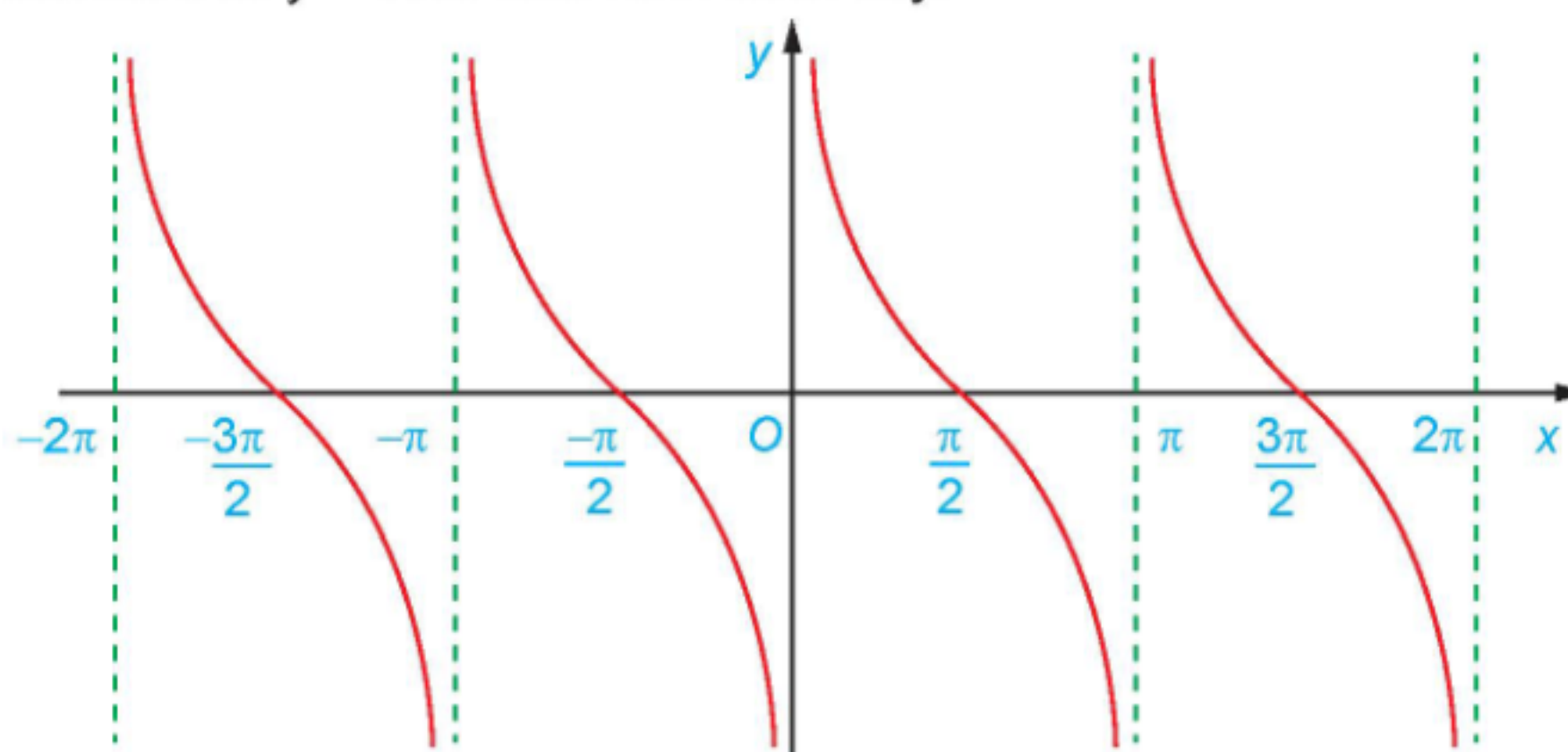
» **HĐ7.** Cho hàm số $y = \cot x$.

- a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.
b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cot x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \cot x)$ với $x \in (0; \pi)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các khoảng khác có độ dài bằng chu kì $T = \pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ như hình dưới đây.



Hình 1.17

Từ đồ thị ở Hình 1.17, hãy tìm tập giá trị và các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cot x$.

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π ;
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

» **Ví dụ 7.** Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.17, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$:

- a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị âm.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, $y = 0$ khi $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

» **Luyện tập 7.** Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.17, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị dương.

BÀI TẬP

1.14. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$.

1.15. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \tan 2x$;

b) $y = \cos x + \sin^2 x$;

c) $y = \sin x \cos 2x$;

d) $y = \sin x + \cos x$.

1.16. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$;

b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$.

1.17. Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, hãy tìm các giá trị x sao cho $\tan x = 0$.

1.18. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kỳ của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

THUẬT NGỮ

- Phương trình lượng giác
- Phương trình lượng giác cơ bản
- Công thức nghiệm

Kiến thức, kỹ năng

- Nhận biết công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản bằng cách vận dụng đồ thị hàm số lượng giác tương ứng.
- Tính nghiệm gần đúng của phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính cầm tay.
- Giải phương trình lượng giác ở dạng vận dụng trực tiếp phương trình lượng giác cơ bản.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình lượng giác.

Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.



Hình 1.18. Dàn pháo

1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

» H01. Nhận biết khái niệm hai phương trình tương đương

Cho hai phương trình $2x - 4 = 0$ và $(x - 2)(x^2 + 1) = 0$.
Tìm và so sánh tập nghiệm của hai phương trình trên.

- Hai phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x) = 0$ tương đương với phương trình $g(x) = 0$ thì ta viết

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Chú ý. Hai phương trình vô nghiệm là tương đương.

» Ví dụ 1. Hai phương trình sau có tương đương không?

$$2x + 6 = 0 \text{ và } x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Giải

Tập nghiệm của phương trình $2x + 6 = 0$ là $S_1 = \{-3\}$.

Phương trình $x^2 + 6x + 9 = 0$ được viết lại thành $(x + 3)^2 = 0$, do đó tập nghiệm của nó là $S_2 = \{-3\}$.

Vậy hai phương trình trên là tương đương.

► **Luyện tập 1.** Xét sự tương đương của hai phương trình sau:

$$\frac{x-1}{x+1} = 0 \text{ và } x^2 - 1 = 0.$$

Chú ý. Để giải phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy gọi là các *phép biến đổi tương đương*.

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho:

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc một biểu thức:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) = g(x)h(x), (h(x) \neq 0).$$

2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

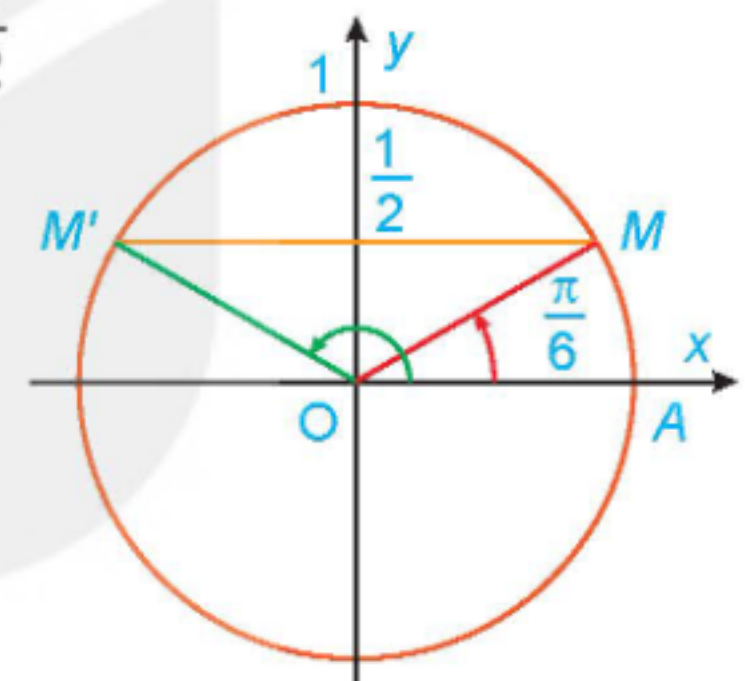
► **HĐ2.** Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$

a) Quan sát Hình 1.19, tìm các nghiệm của phương trình đã cho trong nửa khoảng $[0; 2\pi)$.

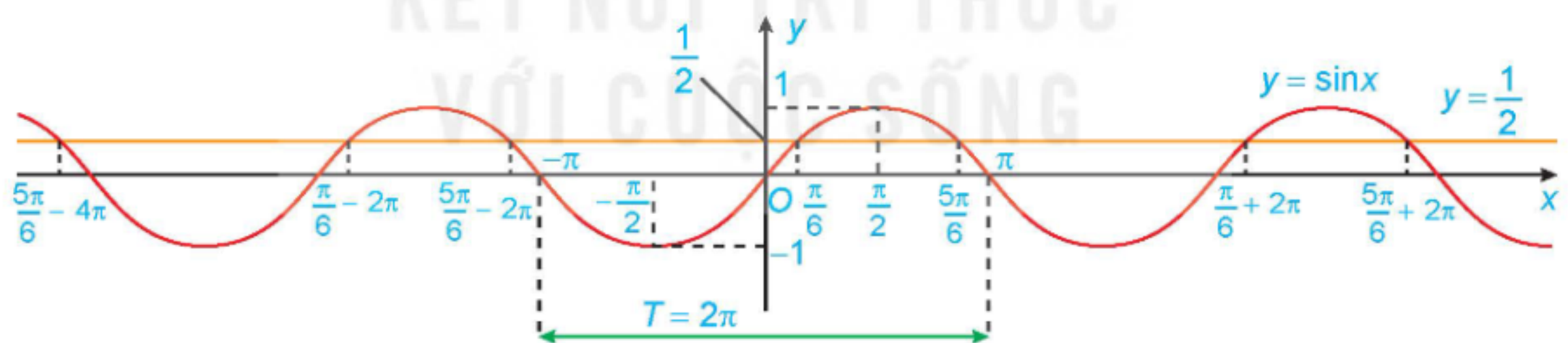
b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số sin, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

Minh họa bằng đồ thị: Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$

là hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \sin x$.



Hình 1.19

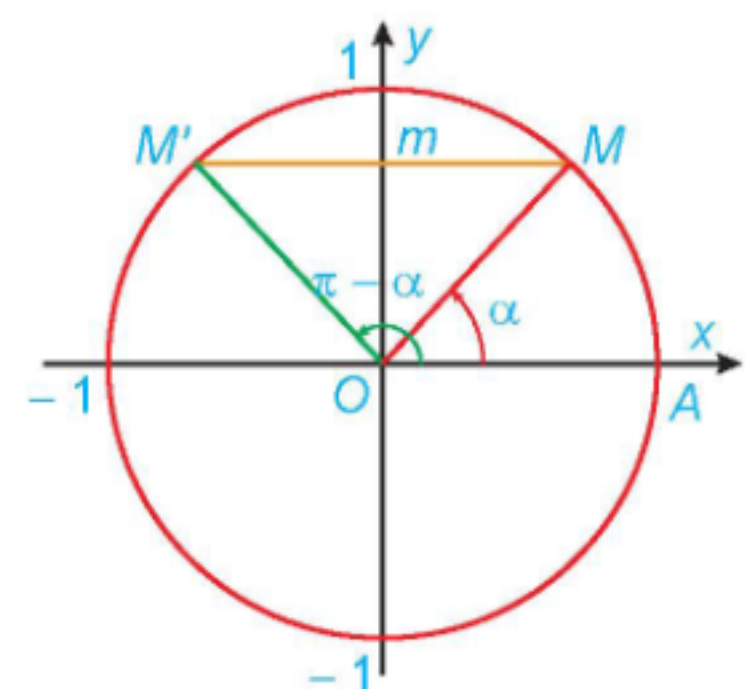


Hình 1.20. Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \sin x$

Tổng quát, xét phương trình $\sin x = m$ (*).

– Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm vì $|\sin x| \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Nếu $|m| \leq 1$ thì tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó, trên đoạn có độ dài 2π là $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, phương trình (*) có các nghiệm α và $\pi - \alpha$ (H.1.21).



Hình 1.21

Do tính tuần hoàn với chu kỳ 2π của hàm sin, ta chỉ việc cộng vào các nghiệm này các bội nguyên của 2π thì sẽ được tất cả các nghiệm của phương trình (*).

- Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

» **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ b) $\sin x = \frac{1}{3}.$

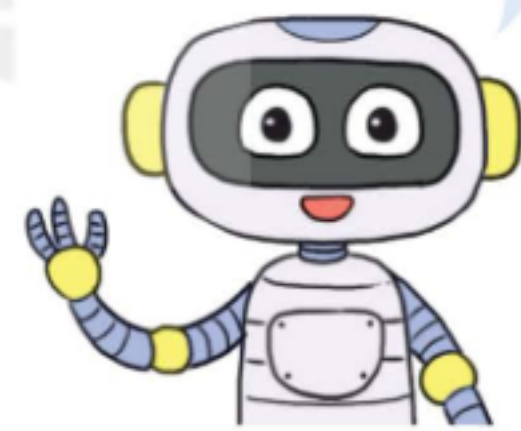
Giải

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Gọi $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thoả mãn $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó ta có:

$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



» **Ví dụ 3.** Giải phương trình $\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x)$.

Giải

$$\begin{aligned} \sin 2x = \sin(60^\circ - 3x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 60^\circ - 3x + k360^\circ \\ 2x = 180^\circ - (60^\circ - 3x) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 60^\circ + k360^\circ \\ -x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12^\circ + k72^\circ \\ x = -120^\circ - k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

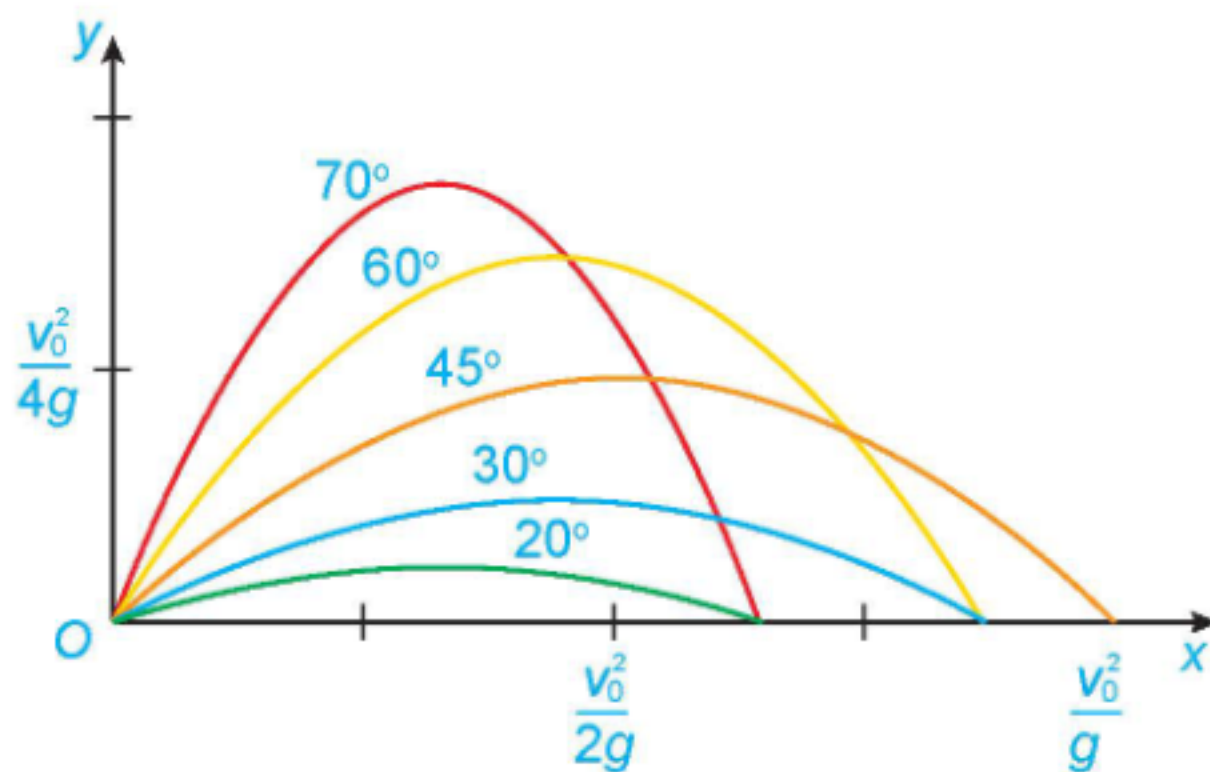
$$x = 12^\circ + k72^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ và } x = -120^\circ - k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Ví dụ 4.** Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, trong Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc

trọng trường) $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.



Cho $y = 0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn chạm đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° .

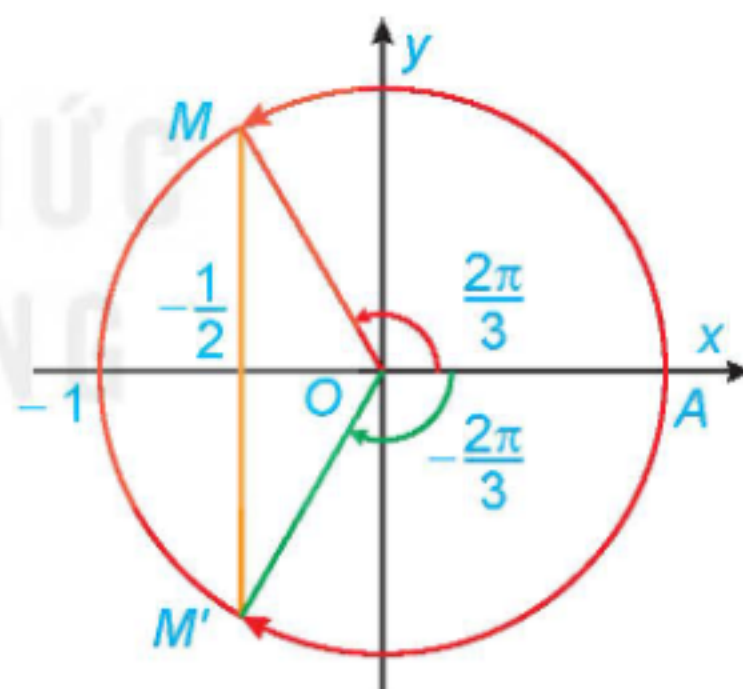
» **Luyện tập 2.** Giải các phương trình sau: a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin 3x = -\sin 5x$.

3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

» **HĐ3.** Nhận biết công thức nghiệm của phương trình

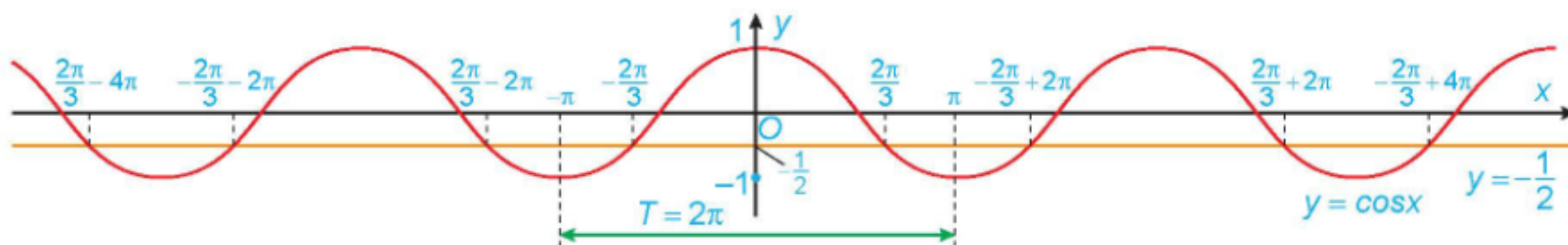
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

- Quan sát Hình 1.22a, tìm các nghiệm của phương trình đã cho trong nửa khoảng $[-\pi; \pi)$.
- Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số cosin, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.



Hình 1.22a

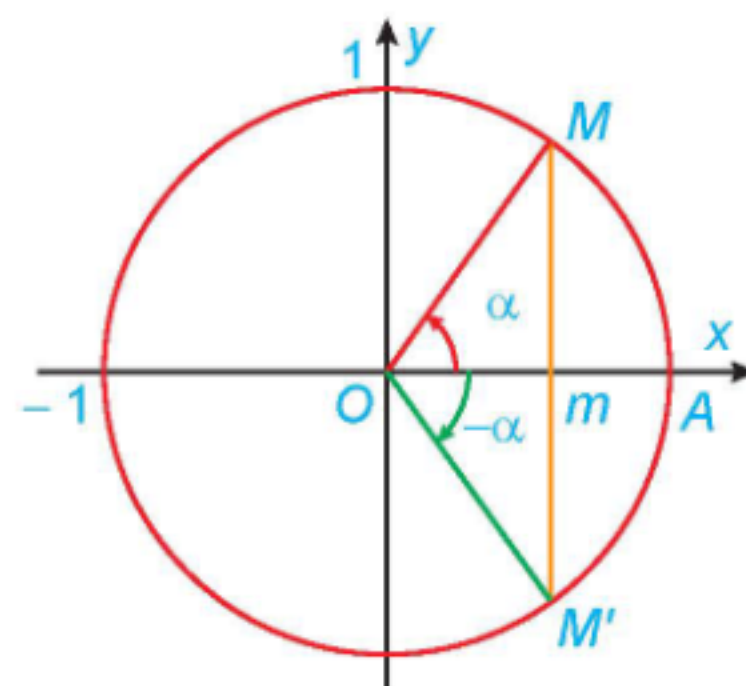
Minh họa bằng đồ thị: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$.



Hình 1.23. Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$

- Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \leq 1$.
- Khi $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thoả mãn $\cos \alpha = m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 1.22b

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

» **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ b) $\cos x = 0, 1.$

Giải

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

b) Gọi $\alpha \in [0; \pi]$ là góc thoả mãn $\cos \alpha = 0, 1$. Khi đó ta có:

$$\cos x = 0, 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$



» **Ví dụ 6.** Giải phương trình $\cos 2x = \cos(45^\circ - x).$

Giải

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos(45^\circ - x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -(45^\circ - x) + k360^\circ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

» **Luyện tập 3.** Giải các phương trình sau: a) $2\cos x = -\sqrt{2};$ b) $\cos 3x - \sin 5x = 0.$

» **Vận dụng**

Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phản bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$

(Theo usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

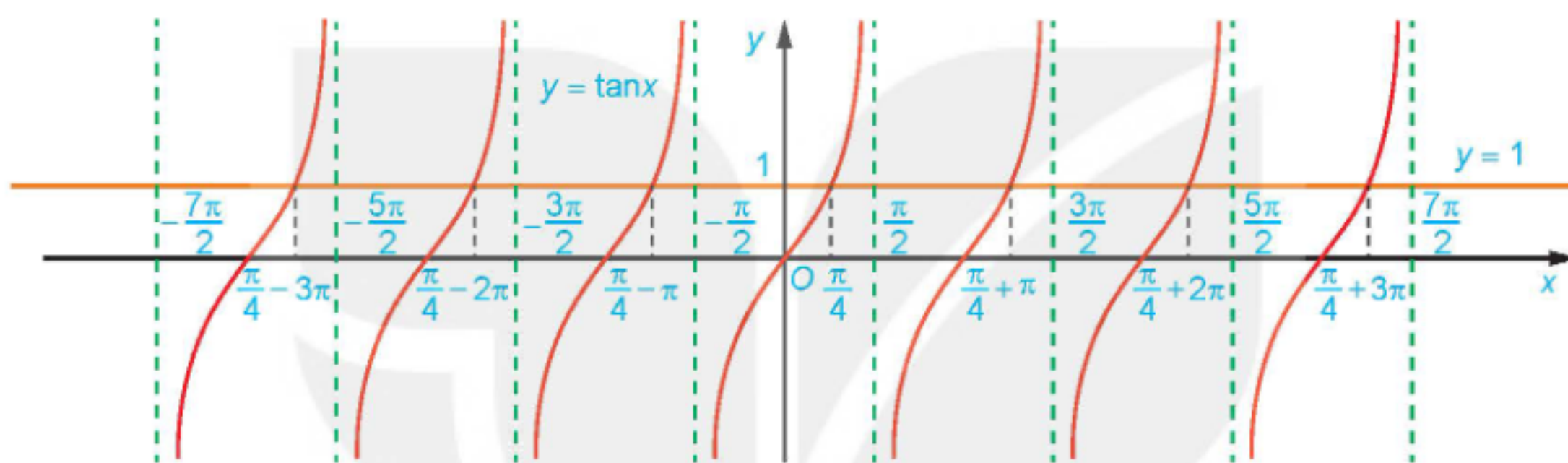
- $F = 0$ (trăng mới);
- $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);
- $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);
- $F = 1$ (trăng tròn).



4. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

» **HĐ4.** Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\tan x = 1$

- Quan sát Hình 1.24, hãy cho biết đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại mấy điểm có hoành độ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Hình 1.24. Đường thẳng $y = 1$ và đồ thị hàm số $y = \tan x$

- Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số tang, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

- Phương trình $\tan x = m$ có nghiệm với mọi m .
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan \alpha = m$. Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý. Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau: a) $\tan x = -\sqrt{3}$;

b) $\tan x = 2$.

Giải

a) $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

b) Gọi $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là góc thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Khi đó ta có:

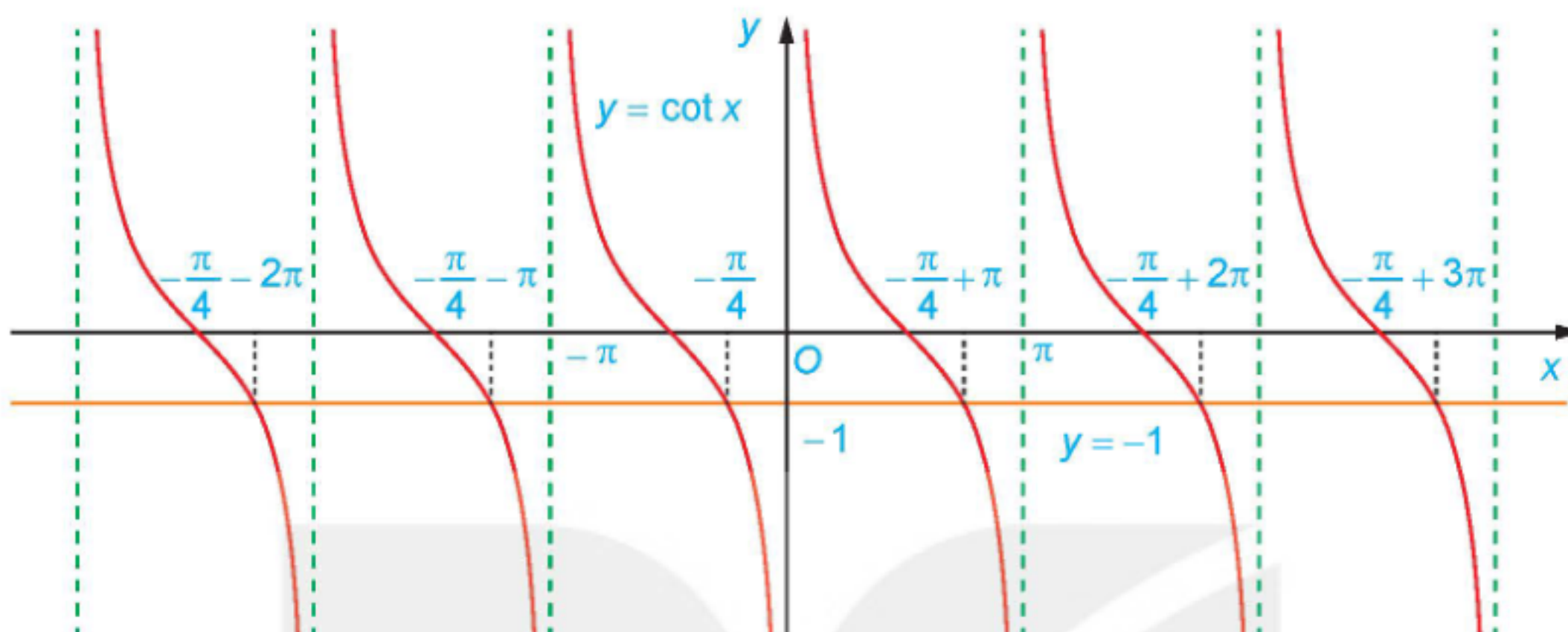
$$\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Luyện tập 4.** Giải các phương trình sau: a) $\sqrt{3} \tan 2x = -1$; b) $\tan 3x + \tan 5x = 0$.

5. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

» **HĐ5.** Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\cot x = -1$

- a) Quan sát Hình 1.25, hãy cho biết đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = \cot x$ tại mấy điểm có hoành độ trong khoảng $(0; \pi)$.



Hình 1.25. Đường thẳng $y = -1$ và đồ thị hàm số $y = \cot x$

- b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số cotang, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

- Phương trình $\cot x = m$ có nghiệm với mọi m .
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thỏa mãn $\cot \alpha = m$. Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý. Nếu số đo góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Ví dụ 8.** Giải các phương trình sau:

- a) $\cot x = -\sqrt{3}$; b) $\cot x = 5$.

Giải

a) $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

- b) Gọi $\alpha \in (0; \pi)$ là góc thỏa mãn $\cot \alpha = 5$. Khi đó ta có:

$$\cot x = 5 \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



» **Luyện tập 5.** Giải các phương trình sau: a) $\cot x = 1$; b) $\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$.

6. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TÌM MỘT GÓC KHI BIẾT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA NÓ

Các phím $(\sin^{-1})$, $(\cos^{-1})$ và $(\tan^{-1})$ của máy tính cầm tay được dùng để tìm số đo (độ hoặc radian) của một góc khi biết một trong các giá trị lượng giác của nó.

Để tìm số đo ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Chọn đơn vị đo góc (độ hoặc radian).

Muốn tìm số đo độ (dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ D), ta ấn

SHIFT MODE 3

Muốn tìm số đo radian (dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ R), ta ấn

SHIFT MODE 4

Bước 2. Tìm số đo góc.

Khi biết sin, cosin hay tang của góc α cần tìm bằng m , ta lần lượt ấn các phím **SHIFT** và một trong các phím **sin**, **cos** và **tan**, rồi nhập giá trị lượng giác m và cuối cùng ấn phím **=**. Lúc này trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hoặc radian).

Chú ý

- Khi ở chế độ radian, các phím $(\sin^{-1})$, $(\tan^{-1})$, cho kết quả là một số thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, phím $(\cos^{-1})$ cho kết quả là một số thuộc khoảng $(0; \pi)$, tất nhiên với $(\sin^{-1})$ và $(\cos^{-1})$ thì $|m| \leq 1$.
- Khi ở chế độ số đo độ, các phím $(\sin^{-1})$ và $(\tan^{-1})$ cho kết quả là số đo góc α từ -90° đến 90° , phím $(\cos^{-1})$ cho kết quả là số đo góc α từ 0° đến 180° , với $(\sin^{-1})$ và $(\cos^{-1})$ thì $|m| \leq 1$.
- Khi có kết quả (trường hợp chọn đơn vị đo độ), ấn phím **° ' "** thì đưa kết quả về dạng độ - phút - giây.

» **Ví dụ 9.** Sử dụng máy tính cầm tay, tìm số đo độ và radian của góc α , biết $\sin \alpha = 0,58$.

Giải

Số đo độ:

$\sin \alpha$	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả của α (gần đúng)
0,58	SHIFT MODE 3 SHIFT sin 0 . 5 8 = ° ' "	35.45054264	$35^\circ 27' 2''$

Số đo radian:

$\sin \alpha$	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả của α (gần đúng)
0,58	SHIFT MODE 4 SHIFT sin 0 . 5 8 =	0.6187286907	0,61873

» **Luyện tập 6.** Sử dụng máy tính cầm tay, tìm số đo độ và radian của góc α , biết:

a) $\cos \alpha = -0,75$;

b) $\tan \alpha = 2,46$;

c) $\cot \alpha = -6,18$.

BÀI TẬP

1.19. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$;

d) $\cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5}$.

1.20. Giải các phương trình sau: a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$; b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

1.21. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8$ m/s² là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm chạm đất của quả đạn).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 m.

1.22. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần.

Em có biết?

Lượng giác được phát triển bởi các nhà thiên văn học người Hy Lạp cổ đại, những người coi bầu trời là nằm bên trong của một mặt cầu, do đó lẽ tự nhiên là các hình tam giác trên mặt cầu được nghiên cứu khá sớm bởi Menelaus ở Alexandria vào khoảng năm 100 sau Công nguyên và các hình tam giác trên mặt phẳng được nghiên cứu muộn hơn nhiều. Cuốn sách đầu tiên chứa đựng các phương pháp xử lí có hệ thống về lượng giác phẳng và lượng giác cầu được viết bởi nhà thiên văn học người Ba Tư Nasir Eddin, khoảng năm 1250 sau Công nguyên.

Regiomontanus (1436 – 1476) là người có công lớn trong việc chuyển Lượng giác từ Thiên văn học sang Toán học. Công trình của ông đã được cải tiến bởi Copernicus (1473 – 1543) và một học trò của Copernicus là Rheticus (1514 – 1576). Cuốn sách của Rheticus là cuốn sách đầu tiên định nghĩa các hàm lượng giác là tỉ số các cạnh của tam giác, mặc dù ông chưa đưa ra tên gọi như hiện nay của chúng. Các tên gọi và kí hiệu như ngày nay chúng ta dùng được đưa ra bởi Leonhard Euler (1707 – 1783), người đã xây dựng lí thuyết hiện đại về các hàm số lượng giác trong cuốn “Mở đầu về giải tích các đại lượng vô cùng bé” xuất bản năm 1748.

Lượng giác là ngành khoa học có nhiều ứng dụng. Có thể kể đến việc sử dụng Lượng giác trong các vấn đề đo đạc của Thiên văn và Địa lí, cũng như những ứng dụng phong phú của Lượng giác trong Lí thuyết số, Cơ học, Điện học, Hoá học, Sinh học, Hải dương học, Đồ hoạ máy tính, Lí thuyết âm nhạc và nhiều lĩnh vực khác.

(Theo C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *A History of Mathematics, Third Edition, Wiley, 2011*).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – TRẮC NGHIỆM

- 1.23. Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?
- A. β và γ . B. α, β, γ .
C. β, γ, δ . D. α và β .
- 1.24. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?
- A. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. B. $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$.
C. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$. D. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.
- 1.25. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?
- A. $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. B. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
C. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- 1.26. Rút gọn biểu thức $M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b)$, ta được
- A. $M = \sin 4a$. B. $M = 1 - 2\cos^2 a$. C. $M = 1 - 2\sin^2 a$. D. $M = \cos 4a$.
- 1.27. Khẳng định nào sau đây là **sai**?
- A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
C. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- 1.28. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?
- A. $y = \tan x + x$. B. $y = x^2 + 1$. C. $y = \cot x$. D. $y = \frac{\sin x}{x}$.
- 1.29. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?
- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.
- 1.30. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ là
- A. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

B – TỰ LUẬN

1.31. Cho góc α thoả mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.32. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

1.33. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$; b) $y = \sin x + \cos x$.

1.34. Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$; c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.35. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t),$$

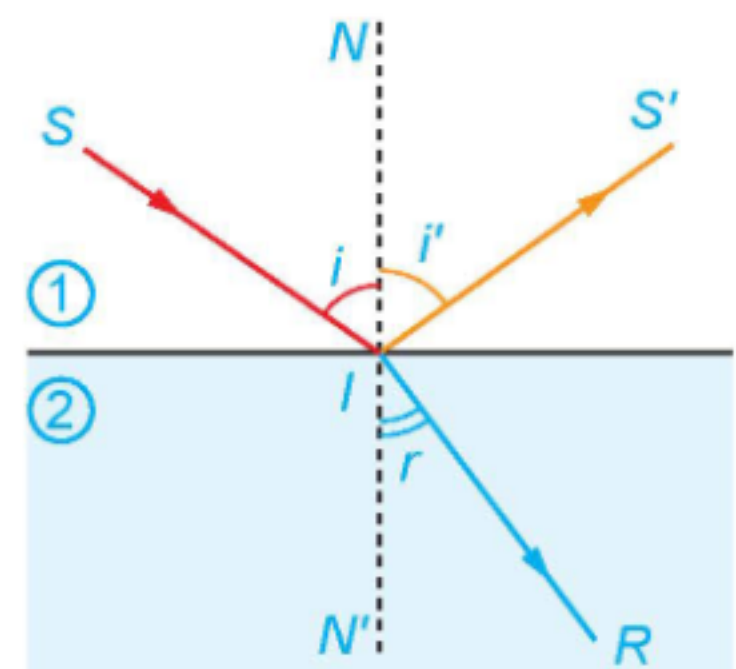
trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kỳ của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

1.36. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.



Hình 1.26



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

- | | |
|--|---|
| 1. Ngữ văn 11, tập một | 24. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng |
| 2. Ngữ văn 11, tập hai | 25. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng |
| 3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11 | 26. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính |
| 4. Toán 11, tập một | 27. Mỹ thuật 11 – Thiết kế mỹ thuật đa phương tiện |
| 5. Toán 11, tập hai | 28. Mỹ thuật 11 – Thiết kế đồ họa |
| 6. Chuyên đề học tập Toán 11 | 29. Mỹ thuật 11 – Thiết kế thời trang |
| 7. Lịch sử 11 | 30. Mỹ thuật 11 – Thiết kế mỹ thuật sân khấu, điện ảnh |
| 8. Chuyên đề học tập Lịch sử 11 | 31. Mỹ thuật 11 – Lí luận và lịch sử mỹ thuật |
| 9. Địa lí 11 | 32. Mỹ thuật 11 – Điêu khắc |
| 10. Chuyên đề học tập Địa lí 11 | 33. Mỹ thuật 11 – Kiến trúc |
| 11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11 | 34. Mỹ thuật 11 – Hội họa |
| 12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11 | 35. Mỹ thuật 11 – Đồ họa (tranh in) |
| 13. Vật lí 11 | 36. Mỹ thuật 11 – Thiết kế công nghiệp |
| 14. Chuyên đề học tập Vật lí 11 | 37. Chuyên đề học tập Mỹ thuật 11 |
| 15. Hoá học 11 | 38. Âm nhạc 11 |
| 16. Chuyên đề học tập Hoá học 11 | 39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11 |
| 17. Sinh học 11 | 40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 |
| 18. Chuyên đề học tập Sinh học 11 | 41. Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền |
| 19. Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí | 42. Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá |
| 20. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí | 43. Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông |
| 21. Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi | 44. Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ |
| 22. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi | 45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11 |
| 23. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính | 46. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách học sinh |

Website: <https://www.nxbgd.vn>



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



ISBN 978-604-0-35079-4



9 786040 350794

Giá: 16.200 đ